Universalidad de la computación cuántica geométrica

Modelo de 3 *estados*

Andrés Sicard y Mario Vélez

Grupo de Lógica y Computación

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

Resumen

El modelo de 3 estados es un modelo de computación cuántica geométrica no abeliana. Se demuestra que éste es un modelo de computación cuántica universal a partir de la construcción de las compuertas de rotación de 1-qubit $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ (universalidad $U(2)$) y de la compuerta de Hadamard H y de las compuertas de fase controlada $B(\eta)$ de 2-qubits (universalidad $U(2^n)$). Para algunas de las compuertas mencionadas, se presenta explícitamente el operador de holonomía $\Gamma_A(\gamma)$ y el camino γ sobre los cuales son construidas.

Computación Cuántica (CC)

$$\left.\begin{array}{r} U:\ \text{operador unitario de evolución} \in U(2^n) \\ |\,x\rangle = |\,x_1,\ldots,x_n\rangle:\ n\text{-qubit} \in \mathbb{C}^{2^n} \\ |\,x'\rangle = |\,x'_1,\ldots,x'_n\rangle:\ n\text{-qubit} \in \mathbb{C}^{2^n} \end{array}\right\} U\,|\,x\rangle = |\,x'\rangle\,.$$

Ejemplo:

$$H\,|\,1\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{|\,x\rangle} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{|\,x'\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0\rangle - |\,1\rangle).$$

Universalidad para la CC (1)

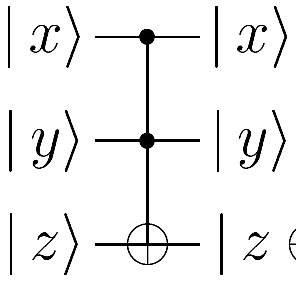
La universalidad de un modelo de CC se establace por su capacidad de generar un conjunto de compuertas cuánticas $\mathcal{U}$ tal que:

U-1 Cualquier circuito clásico puede ser implementado por un circuito cuántico que consta únicamente de un número finito de compuertas del conjunto $\mathcal{U}$.

U-2 Cualquier transformación unitaria $U(2^n)$, puede ser aproximada con suficiente exactitud por un circuito cuántico que consta únicamente de un número finito de compuertas del conjunto $\mathcal{U}$.

Universalidad para la CC (2)

La compuerta de Toffoli no es un compuerta de computación cuántica universal aunque



$$|\,z \oplus (x \wedge y)\rangle = \begin{cases} |\,x \wedge y\rangle & \text{si } z = 0, \\ |\,x \oplus z\rangle & \text{si } y = 1, \\ |\,\neg z\rangle & \text{si } x = y = 1, \\ |\,z\rangle & \text{si } x = 0; y = 1. \end{cases}$$

Universalidad para la CC (3)

Teorema:
Sea U cualquier operador unitario que opere sobre un 1-qubit. Entonces existen números reales α, β, γ y δ tales que

$$U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta),$$

donde

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \\ -i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}, R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \\ \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix},$$

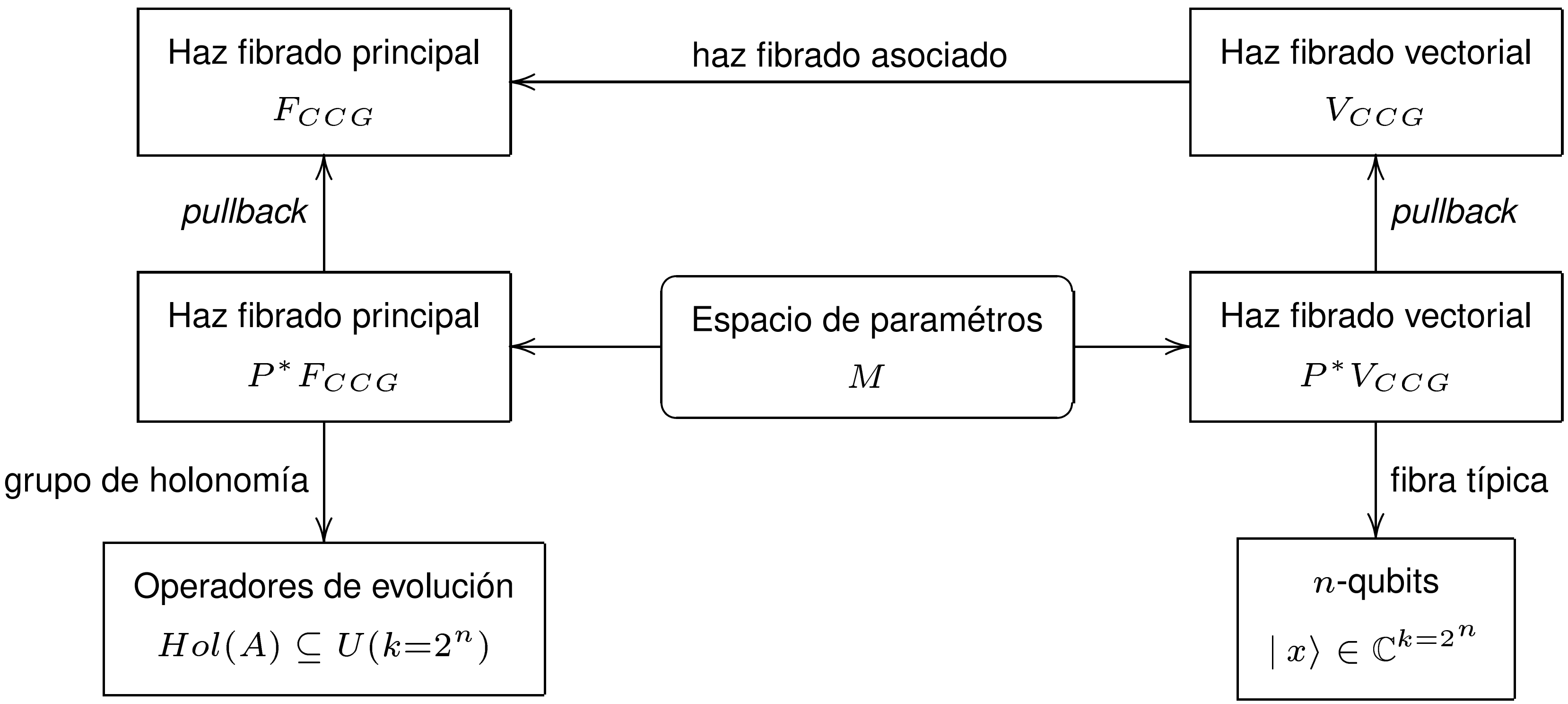
son las compuertas de rotación.

Universalidad para la CC (4)

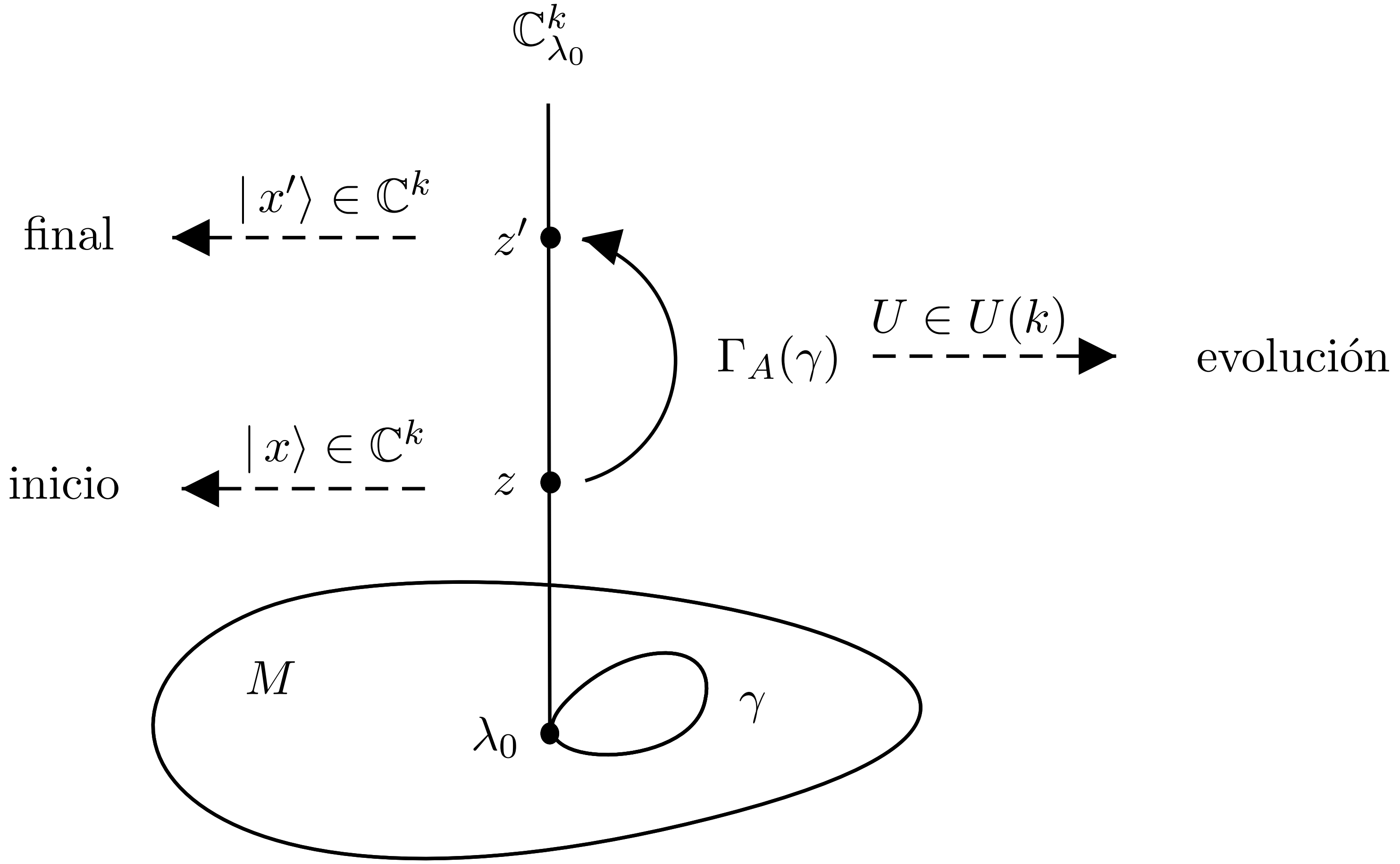
Teorema:

La compuerta de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y las compuertas de fase controladas de 2-qubits $B(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\eta} \end{bmatrix}$, son un conjunto de compuertas universales para $U(2^n)$.

Modelo matemático para la CCGNA



Computación sobre la CCGNA



Modelo 3 estados: 1-qubit (1)

Hamiltoniano:

$$H_0 = \epsilon \,|\, 2\rangle\langle 2 \,| = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, donde $\epsilon \neq 0$ y $\langle 2 \,| = (1 \quad 0 \quad 0)$.

Los autovectores correspondientes al autovalor de energía $E = 0$ son los 1-qubits:

$$| \, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$| \, 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Modelo 3 estados: 1-qubit (2)

Componentes conexión 1-qubit:

$$A_{\phi_1} = \begin{bmatrix} -i \operatorname{sen}^2\theta_1 & a \\ a & i \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{\theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i(\phi_1-\phi_2-\psi_1)} \operatorname{sen}\theta_2 \\ -e^{-i(\phi_1-\phi_2-\psi_1)} \operatorname{sen}\theta_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{\theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\phi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \operatorname{sen}^2\theta_2 \end{bmatrix},$$

donde $a = -i \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 e^{i(\phi_1-\phi_2-\psi_1)}$.

Universalidad 1-qubit (1)

Operador de holonomía:

$\Gamma_A(\gamma) = \mathcal{P}\exp\left(-\oint_\gamma \sum_i A_i di\right)$ para $i \in \{\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2\}$

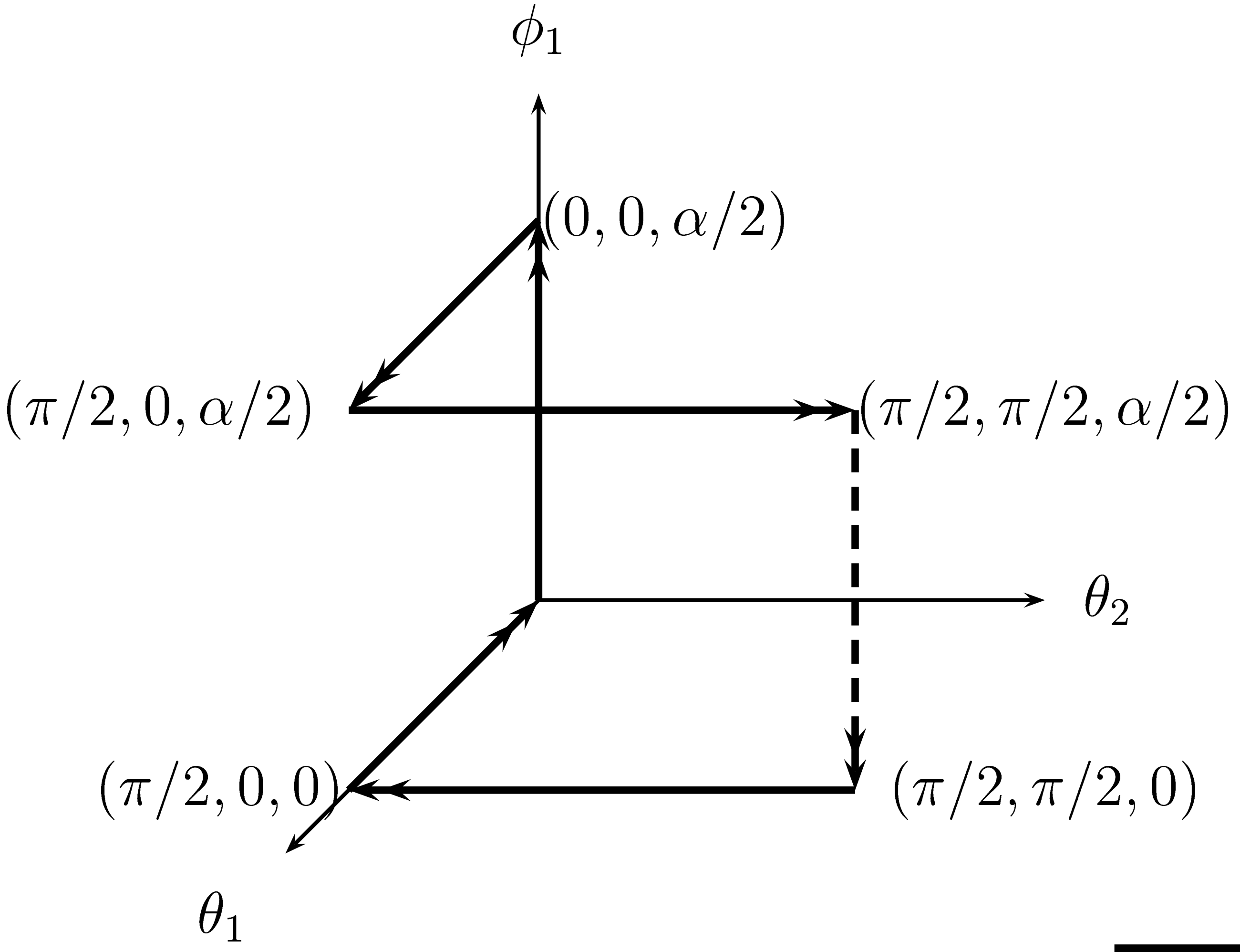
Ciclo para la compuerta $R_z(\alpha)$ en el plano $(\theta_1, \theta_2, \phi_1)$:

$\gamma_{R_z}(\alpha)$: $(0,0,0) \to \left(0, 0, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \to (0,0,0)$.

Compuerta $R_z(\alpha)$:

$$\Gamma_A(\gamma_{R_z}(\alpha)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_z}(\alpha)} A_{\theta_2}\, d\theta_2 + A_{\theta_1}\, d\theta_1 + A_{\phi_2}\, d\phi_2\right)$$

Universalidad 1-qubit (2)



Universalidad 1-qubit (3)

$$
\begin{aligned}
R_z(\alpha) = \exp\Bigg[-\Bigg(&\int_0^{\alpha/2}\left(A_{\phi_1}|_{\theta_1=\theta_2=0}\right)d\phi_1 + \int_0^{\pi/2}\left(A_{\theta_1}|_{\theta_2=0,\phi_1=\pi/2}\right)d\theta_1 \\
&+ \int_0^{\pi/2}\left(A_{\theta_2}|_{\theta_1=\pi/2,\phi_1=\alpha/2}\right)d\theta_2 + \int_{\alpha/2}^{0}\left(A_{\phi_1}|_{\theta_1=\theta_2=\pi/2}\right)d\phi_1 \\
&+ \int_{\pi/2}^{0}\left(A_{\theta_2}|_{\theta_1=\pi/2,\phi_1=0}\right)d\theta_2 + \int_{\pi/2}^{0}\left(A_{\theta_1}|_{\theta_2=\phi_1=0}\right)d\theta_1\Bigg)\Bigg] \\
= \exp\left(-\int_{\alpha/2}^{0}\left(A_{\phi_1}|_{\theta_1=\theta_2=0}\right)d\phi_1\right)& \\
= \exp\left[-\begin{pmatrix} i\alpha/2 & 0 \\ 0 & -i\alpha/2 \end{pmatrix}\right].&
\end{aligned}
$$

Universalidad 1-qubit (4)

Ciclos para las compuertas $R_y(\alpha)$ y $R_x(\alpha)$ en los planos (θ_2, θ_1) y $(\phi_2, \theta_2, \theta_1)$ respectivamente:

$\gamma_{R_y}(\alpha)$: $(0,0) \to \left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \to (0,0)$

$\gamma_{R_x}(\alpha)$: $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\alpha}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Compuertas $R_y(\alpha)$ y $R_x(\alpha)$

$$\Gamma_A(\gamma_{R_y}(\alpha)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_y}(\alpha)} A_{\theta_2}\, d\theta_2 + A_{\theta_1}\, d\theta_1\right)$$

$$\Gamma_A(\gamma_{R_x}(\alpha)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_x}(\alpha)} A_{\phi_2}\, d\phi_2 + A_{\theta_2}\, d\theta_2 + A_{\theta_1}\, d\theta_1\right)$$

Modelo 3 estados: 2-qubit (1)

Hamiltoniano:
$H_0^{2q} = H_0^a \otimes \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_3 \otimes H_0^b$, donde H_0^a, H_0^b son los Hamiltonianos asociados a los subsistemas de 1-qubit.

Los autovectores correspondientes al autovalor de energía $E = 0$ son los 2-qubits:

$$|\,0,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$|\,0,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$|\,1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$|\,1,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Modelo 3 estados: 2-qubit (2)

Componentes conexión 2-qubit:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\mu_2^a|^2 \left|\mu_2^b\right|^2 \end{pmatrix}, A_{\theta_2^a} = A_{\theta_2} \otimes A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operador de holonomía:

$$\Gamma_A(\gamma) = \exp\left(- \oint_\gamma (A_\xi d\xi + A_{\theta_2^a} d\theta_2^a) \right).$$

Universalidad 2-qubit (1)

Ciclo para la compuerta de Hadamard en el plano $(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2)$:

$\gamma_{H'}(a, b, c)$:

$$\underbrace{(0,0,0,0) \to \left(0,0,0,\frac{a}{2}\right) \to \left(0,0,\frac{\pi}{2},\frac{a}{2}\right) \to \left(0,0,\frac{\pi}{2},0\right) \to (0,0,0,0) \to}_{\text{camino } \gamma_{R_y}(a)}$$

$$\underbrace{\left(0,\frac{\pi}{2},0,0\right) \to \left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right) \to \left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{b}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2},0,\frac{b}{2}\right) \to \left(0,\frac{\pi}{2},0,0\right) \to (0,0,0,0) \to}_{\text{camino } \gamma_{R_x}(b)}$$

$$\underbrace{\left(\frac{c}{2},0,0,0\right) \to \left(\frac{c}{2},0,\frac{\pi}{2},0\right) \to \left(\frac{c}{2},0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \left(0,0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \left(0,0,\frac{\pi}{2},0\right) \to (0,0,0,0),}_{\text{camino } \gamma_{R_z}(c)}$$

donde $a = -0{,}05$, $b = 4{,}02$, y $c = -2{,}4$.

Universalidad 2-qubit (2)

Compuertas de fase $B(\eta)$:

$$B(\eta) = \Gamma_A(\gamma_B(\eta)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_B(\eta)} (A_\xi d\xi + A_{\theta_2^a} d\theta_2^a)\right),$$

donde $\gamma_B(\eta)$ es un ciclo en el plano (θ_2^a, ξ) dado por:

$\gamma_B(\eta)$: $(0,0) \to \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \to \left(\frac{\pi}{2}, \eta\right) \to (0,\eta) \to (0,0)$

Conclusiones

En el contexto de la CCGNA, uno de los modelos que presenta características de universalidad, es el modelo de 3 estados, el cual se obtiene a partir de un Hamiltoniano degenerado en el valor de energía $E = 0$.

En particular, la universalidad $U(2)$ del modelo se obtiene al construir las compuertas de rotación $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ que actúan sobre un 1-qubit, y la universalidad $U(2^n)$ del modelo se obtiene al construir la compuerta de Hadamard H y las compuertas de fase controlada $B(\eta)$ que actúan sobre un 2-qubit.

Agradecimientos y contacto

Agradecimientos:

Este trabajo hace parte del proyecto de investigación *Computación Cuántica Geométrica No Abeliana* $N_0.\ py0117$, financiado por la universidad EAFIT.

Contacto:

Andrés Sicard

email: `asicard@eafit.edu.co`

página *web*: `sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/personal`

Mario Vélez

email: `mvelez@eafit.edu.co`

página *web*: `sigma.eafit.edu.co:90/~mvelez`