La representación infinito-dimensional del álgebra dinámica $su(1,1)$ de la caja de potencial en la hipercomputación cuántica

J. G. Molina, A. Sicard, J. Ospina y M. Vélez

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

Resumen

Una representación infinita (RI) irreducible del álgebra dinámica $su(1{,}1)$, asociada a la caja de potencial, sobre el espacio de autoestados de su Hamiltoniano H permite escribir a H y al operador número N como matrices infinitas que actúan sobre dicho espacio de autoestados. A partir de allí, un modelo de hipercomputación planteará la solución de un problema indecidible por una máquina de Turing, en un espacio de búsqueda infinito.

Palabras claves: Álgebra dinámica de Lie, hipercomputación cuántica, caja de potencial, Hamiltoniano, representación infinita irreducible.

Introducción

La hipercomputación es la computación de problemas que no pueden computarse con una máquina de Turing [3, p. 461]. En este artículo se presenta el papel que juega la RI del álgebra dinámica de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$, subyacente a algunos modelos de hipercomputación cuántica cuyo referente físico es la caja de potencial [11, 12], al permitir generar el espectro y factorizar el Hamiltoniano H de la caja de potencial, en términos de operadores de creación $a^\dagger$ y aniquilación a. Su RI irreducible conduce a escribir el operador número N como una matriz infinita operando sobre la base ∞-dimensional $\{|\,n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ de autovectores de H, en cuyos términos se codificará el problema a hipercomputar. Además, los estados coherentes Barut-Girardello $|\,z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$ asociados al álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$, servirán como punto de partida para encontrar la solución al problema propuesto.

Representación infinito-dimensional irreducible de su(1,1)

Se denomina observable a una propiedad medible de un sistema físico, y estado del sistema a una configuración no perturbada de sus variables dinámicas en respuesta a condiciones externas, con una probabilidad asociada de ser obtenido en una medición [4, pp. 38,11-12].

Para efectos de hipercomputación, interesan álgebras de Lie de dimensión finita con RI irreducibles, que representen en matrices infinitas ciertos observables que aparecen en referentes físicos de los modelos de hipercomputación, y en vectores infinitos los estados correspondientes a sus autovectores. Cuando una subálgebra de Cartan $\mathfrak{C}$ actúa sobre su álgebra de Lie $\mathfrak{L}$, a través de la representación adjunta, se llega a una descomposición Cartan de $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{C} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{L}_\alpha) \ , \tag{1}$$

donde la acción de $\mathfrak{C}$ preserva cada $\mathfrak{L}_\alpha$, subálgebra formada por los $X \in \mathfrak{L}$ tales que $ad_C(X) = [C, X] = \alpha(C)X$, para todo $C \in \mathfrak{C}$. Estos funcionales lineales $\alpha(C)$, que actúan como valores propios (o pesos de la representación adjunta) son las raíces de $\mathfrak{L}$ y los $\mathfrak{L}_\alpha$ en (1) son los espacios de raíces. El conjunto Φ de raíces de $\mathfrak{L}$ está formado por los $\alpha \in \mathfrak{C}^*$ no nulos para los que $\mathfrak{L}_\alpha \neq 0$ y tiene las siguientes propiedades: los $\mathfrak{L}_\alpha$ son unidimensionales; Φ genera a $\mathfrak{C}^*$; $[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] = \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$; si $\alpha \in \Phi$, entonces $-\alpha \in \Phi$ [6, p. 198]. Se considera el grupo de Lie lineal $SU(1,1)$ de matrices 2×2 con determinante 1, correspondientes a formas bilineales hermitianas que preservan $z_1z_1^* - z_2z_2^*$ donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ [9, p. 326]. Y la correspondiente álgebra de Lie lineal $\mathfrak{su}(1,1)$ consta de matrices 2×2, antihermíticas y de traza nula, escribiéndose su elemento genérico, para α, β,$\gamma \in \mathbb{C}$, como $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$. Por tanto $A = \alpha C + \beta X + \gamma Y$, donde $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Así que $\mathfrak{su}(1,1)$ es un álgebra 3-dimensional, con generador Cartan C y generadores no diagonales X e Y, con relaciones de conmutación:

$$[X, Y] = 2iC \ , \qquad [X, C] = 2iY \ , \qquad [Y, C] = -2iX \ . \tag{2}$$

Aunque las relaciones (2) brindan una representación adjunta de $\mathfrak{su}(1,1)$, para obtener una descomposición Cartan de $\mathfrak{su}(1,1)$, se definen nuevos generadores: $a^\dagger = \frac{1}{2}(X - iY) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \frac{1}{2}(X + iY) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, consiguiéndose una representación adjunta de $\mathfrak{L} = \mathfrak{su}(1,1)$, análoga a (2), pero con relaciones de conmutación dadas por:

$$[C, a^\dagger] = 2a^\dagger \ , \qquad [C, a] = -2a \ , \qquad [a, a^\dagger] = C \ , \tag{3}$$

en la que los operadores no diagonales a, $a^\dagger$, generadores de los $\mathfrak{L}_\alpha$, resultan ser vectores propios de C, conforme a la descomposición Cartan enunciada en (1), y $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_{-2+2} = [\mathfrak{L}_{-2}, \mathfrak{L}_2] = \mathfrak{C}$, al ser $\mathfrak{L}_{-2} = \langle a\rangle$, $\mathfrak{L}_2 = \langle a^\dagger\rangle$ y $\mathfrak{C} = \langle C\rangle$.

Para tener una RI de $\mathfrak{L} = \mathfrak{su}(1,1)$ en el espacio de estados $\{|\,n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$, se elige el espacio vectorial ∞-dimensional de sucesiones $l_2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, y se define un homomorfismo ρ: $\mathfrak{su}(1,1) \to \mathfrak{gl}(l_2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$, que preserve (3). Dada entonces una base ortonormal $\{|\,n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ de $l_2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, para un cierto rótulo $k > 0$, denominado índice de Bargmann, se define la acción sobre los vectores básicos mediante [7, p. 10]:

$$\begin{gathered} \rho(C)\,|\,n\rangle = 2(k+n)\,|\,n\rangle \ , \quad \rho(a^\dagger)\,|\,n\rangle = ((n+1)(2k+n))^{\frac{1}{2}}\,|\,n+1\rangle \ , \\ \rho(a)\,|\,n\rangle = (n(2k+n-1))^{\frac{1}{2}}\,|\,n-1\rangle \ , \end{gathered} \tag{4}$$

resultando una representación que preserva (3), en vista de lo cual, se identifican C, $a^\dagger$ y a con sus respectivos representantes $\rho(C)$, $\rho(a^\dagger)$ y $\rho(a)$. Mediante (4), $\mathfrak{su}(1,1)$ alcanza una representación infinita, pues sucede así para sus tres generadores C, $a^\dagger$ y a, cuyas entradas matriciales, dado que $\langle m \mid n\rangle = \delta_{mn}$, se obtienen como:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \langle m\,|\,C\,|\,n\rangle = 2(k+n)\delta_{mn} \ , \\ a^\dagger_{mn} &= \langle m\,|\,a^\dagger\,|\,n\rangle = ((n+1)(2k+n))^{\frac{1}{2}}\delta_{m(n+1)} \ , \\ a_{mn} &= \langle m\,|\,a\,|\,n\rangle = (n(2k+n-1))^{\frac{1}{2}}\delta_{m(n-1)} \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, si en (4), n toma valores 0, 1, ..., se induce la naturaleza de los operadores radicales $a^\dagger$ y a, pues $a^\dagger\,|\,0\rangle = \sqrt{2k}\,|\,1\rangle$ y, en consecuencia $|\,1\rangle = a^\dagger(1/\sqrt{2k})\,|\,0\rangle$. De esta foma, se observa que cada vector $|\,n\rangle$, autovector de C, se obtiene de $|\,0\rangle$, vía la potencia n-ésima del operador $a^\dagger$, como:

$$|\,n\rangle = (a^\dagger)^n \left(n!\prod_{i=0}^{n-1}(2k+i)\right)^{-1/2} |\,0\rangle \ ,$$

motivando que $a^\dagger$ se denomine operador de creación. A su vez, se dirá que el operador a es un operador de aniquilación, pues actúa como bajador sobre cada vector básico y, al actuar sobre el vector fundamental $|\,0\rangle$, produce el 0 del espacio. Como en este tipo de representación, no se encuentra ninguna cota superior para la acción de $a^\dagger$, se trata entonces de una RI irreducible. Puesto que los vectores básicos denotan estados cuánticos, al espacio de Hilbert, cuyos estados resultan sucesivamente de un estado fundamental por acción de un operador de creación, se lo denomina espacio de Fock [4, p. 138-139]. Cuando no hay cota superior, el espacio de Fock es ∞-dimensional.

En relación con los estados coherentes asociados al álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$, se definen los estados coherentes Barut-Girardello $|\,z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$, como los autoestados del operador de aniquilación a, es decir, $a\,|\,z\rangle = z\,|\,z\rangle$, cuya solución normalizada, en la representación de rótulo k, $|\,k, n\rangle$, está dada por [5, p. 13]:

$$|\,z\rangle = \left\{\Gamma(2k)\,|z|^{-2k+1}\,I_{2k-1}(2\,|z|)\right\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!(2k)_n)^{\frac{1}{2}}}\,|\,k, n\rangle \ ,$$

donde $(2k)_n = \Gamma(2k+n)\Gamma(2k)^{-1}$ e $I_\nu(z)$ es la función modificada de Bessel de primera clase.

Álgebra dinámica para la caja de potencial

Se considera una partícula de masa m, cuya energía potencial tiene un valor constante $E_p = -\dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$ (asumido como nivel 0 de energía), para $0 < x < \pi a$, mientras que $E_p = \infty$, para $x = 0$ ó $x = \pi a$, de modo que la partícula quede confinada al intervalo $(0, \pi a)$ por una caja de potencial [1].

El conjunto de todos los estados posibles de la partícula en este sistema se describe mediante un espacio de Hilbert abstracto complejo ∞-dimensional $\mathcal{H}$ isomorfo al espacio de las funciones de cuadrado integrable $L^2([0, \pi a], dx)$ [2], y cualquier vector de estado $|\,\psi(x)\rangle \in \mathcal{H}$ (en términos de la notación bra-ket de Dirac [4]) o función de onda $\psi(x) \in L^2([0, \pi a], dx)$ satisface la ecuación de valores propios de Schrödinger:

$$H\psi(x) = E\psi(x) \ , \tag{6}$$

donde el Hamiltoniano H, que describe la energía total del sistema, es un operador lineal hermítico (auto-adjunto) que actúa sobre el espacio de estados y viene dado por [1, p.2358]:

$$H = i^2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2ma^2} \ . \tag{7}$$

La solución de (6), con las condiciones (Dirichlet) de frontera $\psi(0) = \psi(\pi a) = 0$, impuestas por continuidad (dado que $\psi = 0$ fuera de la caja, donde E_p es infinita) da como valores propios los niveles de energía E_n y los estados propios normalizados $\psi_n(x)$, para $n \geq 0$, como:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2}n(n+2) \equiv \hbar\omega e_n \ , \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}sen\left((n+1)\frac{x}{a}\right) \equiv \langle x \mid n\rangle \ , \tag{8}$$

siendo $\omega = \dfrac{\hbar}{2ma^2}$ y $e_n = n(n+2)$, con lo cual la estructura espectral de H dada por (8) resulta ser no degenerada. De este modo, $H\psi_n(x) = H\,\langle x \mid n\rangle = E_n\,\langle x \mid n\rangle$, o sea, $\langle x\,|\,H\,|\,n\rangle = \langle x\,|\,E_n\,|\,n\rangle$ y, en consecuencia,

$$H\,|\,n\rangle = E_n\,|\,n\rangle \ . \tag{9}$$

Para describir la estructura espectral del Hamiltoniano que se revela matricialmente en (9), se usa la representación de $\mathfrak{su}(1,1)$ dada por (4), para $k = \dfrac{3}{2}$ [1, p.2370]:

$$C\,|\,n\rangle = (2n+3)\,|\,n\rangle \ , \quad a^\dagger\,|\,n\rangle = \sqrt{e_{n+1}}\,|\,n+1\rangle \ , \quad a\,|\,n\rangle = \sqrt{e_n}\,|\,n-1\rangle \ . \tag{10}$$

Con (10), quedan definidos operadores de creación y aniquilación, actuando en el espacio de Fock, mediante los cuales llega a factorizarse el Hamiltoniano, en virtud de (8), como $H = \hbar\omega a^\dagger a$, ya que, llamando $X_N = a^\dagger a$, se tiene:

$$X_N\,|\,n\rangle = a^\dagger a\,|\,n\rangle = \sqrt{e_n}a^\dagger\,|\,n-1\rangle = \sqrt{e_n}\sqrt{e_n}\,|\,n\rangle = e_n\,|\,n\rangle \ ,$$

de modo que X_N es un operador diagonal con valores propios e_n. En efecto, de acuerdo con (5), la representación en matrices infinitas de los operadores a y $a^\dagger$ tiene la forma [1, p. 2368-2369]:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{e_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{e_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \ , \qquad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{e_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{e_2} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \ , \tag{11}$$

obteniéndose X_N como matriz diagonal infinita con $e_0, e_1, e_2, \dots$ en la diagonal. Y si Δ es un operador diagonal con valores propios δ_n, de modo que $\Delta\,|\,n\rangle = \delta_n\,|\,n\rangle$, se define [1, p. 2368] su diferencia finita Δ' como el operador diagonal $\Delta'\,|\,n\rangle = \delta'_n\,|\,n\rangle$ donde $\delta'_n = \delta_{n+1} - \delta_n$. Así X'_N será un operador diagonal con matriz $X'_N = [a, a^\dagger]$, cuyos valores propios serán pues $e'_n = e_{n+1} - e_n = 2n+3$, mostrando (3) que $X'_N = C$ es el mismo generador Cartan de $\mathfrak{su}(1,1)$. Definiendo ahora el operador diagonal número N como $N = \frac{1}{2}(C-3)$, tendrá a n como valores propios, al cumplirse

$$N\,|\,n\rangle = \frac{1}{2}(C-3)\,|\,n\rangle = \frac{1}{2}(2n+3)\,|\,n\rangle - \frac{3}{2}\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle \ , \tag{12}$$

siendo pues una matriz diagonal infinita con 0, 1, 2, ... en la diagonal. A su vez los estados coherentes de la caja de potencial, de acuerdo con () para $k = \frac{3}{2}$, se obtienen como:

$$|\,z\rangle = |z|\left\{I_2(2\,|z|)\right\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,(n!(n+2)!)^{-\frac{1}{2}}\,|\,n\rangle \ . \tag{13}$$

Se concluye pues que $\mathfrak{su}(1,1)$ es un álgebra de Lie que permite factorizar el Hamiltoniano (7) de la caja de potencial, generar su espectro y expresar sus estados coherentes, justificándose que se le denomine su álgebra dinámica [1, p.2368].

Aplicación a la hipercomputación

Los modelos de hipercomputación propuestos desde la computación cuántica [8, 11, 12], deben sus características de hipercomutación principalmente al álgebra dinámica asociada al referente físico empleado, y a la posibilidad de una evolución adiabática establecida entre ciertos Hamiltonianos.

En particular, en el modelo de hipercomputación que emplea la caja de potencial como referente físico [11, 12], una ecuación Diofantina

$$D(x_1, \dots, x_k) = 0 \tag{14}$$

es codificada por el Hamiltoniano $H_{\mathrm{D}} = (D(N_1, \dots, N_k))^2$ donde los operadores N_i corresponden al operador número (12). Definiendo $|\,\{n\}\rangle_0$ como el estado fundamental de H_{D} se obtiene entonces que $H_{\mathrm{D}}\,|\,\{n\}\rangle_0 = 0$, si y sólo si, la ecuación (14) tiene solución en los números enteros no negativos. De esta forma se establece una solución al décimo problema de Hilbert [10], y de allí las características hipercomputacionales del modelo propuesto.

Para obtener el estado fundamental $|\,\{n\}\rangle_0$, a partir de los operadores de creación y aniquilación (11), se construye un Hamiltoniano inicial

$$H_{\mathrm{I}} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i^\dagger - \alpha_i^*\right)(a_i - \alpha_i) \ ,$$

y a partir de los estados coherentes (13), se construye un estado inicial

$$|\,\psi(0)\rangle = \bigotimes_{i=1}^{k}|\,z_i\rangle \ ,$$

verificándose que $H_{\mathrm{I}}\,|\,\psi(0)\rangle = 0$. Entonces, a partir del estado fundamental $|\,\psi(0)\rangle$ se obtiene el estado fundamental $|\,\{n\}\rangle_0$, por medio de una evolución adiabática en un período de tiempo $[0, T]$ (para algún T finito) sobre un Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H_{\mathrm{A}}(t) = (1 - t/T)H_{\mathrm{I}} + (t/T)H_{\mathrm{D}} \ ,$$

para el cual $H_{\mathrm{A}}(0) = H_{\mathrm{I}}$ y $H_{\mathrm{A}}(T) = H_{\mathrm{D}}$. Se decide entonces si la ecuación Diofantina tiene o no solución, según que sea o no cero el nivel de energía del estado fundamental alcanzado, consiguiéndose así resolver el décimo problema de Hilbert.

Conclusión

En esta investigación, pudo observarse el papel fundamental que juega la representación infinita irreducible del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ en la hipercomputación del décimo problema de Hilbert, empleando como referente físico la caja de potencial. Ha sido por su medio, a través de la factorización del Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación, que generan los espacios radicales del álgebra dinámica asociada a la caja de potencial, como se ha hecho posible que el Hamiltoniano consiga una representación en matriz infinita y actúe sobre sus autoestados, representados a su vez en vectores infinitos de un espacio de Fock. Fue mediante este recurso, pasando al operador número N, vía una evolución adiabática que partía de un estado fundamental construido con los estados coherentes, asociados al álgebra, como se logró entablar la búsqueda de la solución en el espacio ∞-dimensional $\{|\,n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ de autovectores de H.

Agradecimientos

Este artículo es un producto de un proyecto de investigación financiado por COLCIENCIAS-EAFIT (proyecto #1216-05-13576).

Referencias

[1] J. P. Antoine et al. Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl-Teller potentials. *J. Math. Phys.*, 42(6):2349–2387, 2001.

[2] François Gieres. Mathematical surprises and Dirac's formalism in quantum mechanics. *Rep. Prog. Phys.*, 63:1893–1931, 2000.

[3] B. Jack Copeland. Hypercomputation. *Minds and Machines*, 12:461–502, 2002.

[4] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford: Oxford University Press, 4th (revised) edition, 1999.

[5] Kazuyuki Fujii. Introduction to coherent states and quantum information theory. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0112090 v2, 2002.

[6] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory. A First Course*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[7] Wolter Groenevelt. Laguerre functions and representations of $\mathfrak{su}(1,1)$. Eprint: arxiv.org/abs/math.ca/0302342, 2003.

[8] Tien D. Kieu. Quantum algorithm for the Hilbert's tenth problem. *Int. J. Theor. Phys.*, 42(7):1461–1478, 2003.

[9] Anthony W. Knapp. *Lie groups, Lie algebras and cohomology.* Princeton: Princeton University Press, 1988.

[10] Yuri V. Matiyasevich. *Hilbert's tenth problem.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1993.

[11] Andrés Sicard, Juan Ospina, and Mario Vélez. Numerical simulations of a possible hypercomputational quantum algorithm. In Bernardete Ribeiro, editor, *Proc. 7th International Conference on Adaptative and Natural Computing Algorithms - ICANNGA 2005*, University of Coimbra, Portugal, 21st - 23rd March 2005. Springer-Verlag. In printing.

[12] Andrés Sicard, Mario Vélez, and Juan Ospina. Hypercomputation based on quantun computation. In *Quantum Information and Computation.* Proc. of SPIE, 2005. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0406137. In printing.