ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LOS NÚMEROS REALES COMPUTABLES

Andrés Sicard (email: asicard@eafit.edu.co)

Grupo Lógica y Computación
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad EAFIT

Turing-computabilidad (1)

Máquina de Turing *circular*: nunca imprime más que un número finito de símbolos.

Máquina de Turing *circle-free*: imprime un número infinito de símbolos.

Secuencia computable: secuencia computada por alguna máquina de Turing *circle-free* (no secuencias finitas son computables de acuerdo a esta definición).

Secuencia: $0101\ldots$ Números asociado:
$\{x \in \mathbb{R} | x - 0{,}0101\ldots \in \mathbb{Z}\} = \{0{,}0101\ldots = \frac{1}{3}, 1{,}0101\ldots = \frac{4}{3}, \ldots\}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, el número x es denominado un número real Turing-computable si es el número computado por una máquina de Turing *circle-free* (ej. π, e, etc.) [9].

Turing-computabilidad (2)

Existencia de números reales no Turing-computables (argumento diagonal):

$$\begin{array}{cccc} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Número no Turing-computable: secuencia $a'_{i,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,i} = 1, \\ 1 & \text{si } a_{i,i} = 0. \end{cases}$

Cauchy-computabilidad (1)

Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x = lim_{n\to\infty} s(n)$ donde s: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ es una sucesión de números racionales. La sucesión $s(n)$ es denominada el generador del número x.

La sucesión $s(n)$ es denominada un generador Turing-computable si $s(n)$ es una función total Turing-computable.

Sea $x \in \mathbb{R}$, el número x es denominado un número real Cauchy-computable si existe un generador $s(n)$ para x tal que [1]

$$s(n) \text{ sea un generador Turing-computable y} \tag{1}$$

$$|x - s(n)| \leq 2^{-n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Cauchy-computabilidad (2)

Algunas sucesiones posibles para e: $\begin{cases} a_n = (1+\frac{1}{n})^n, \\ a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \\ a_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}. \end{cases}$

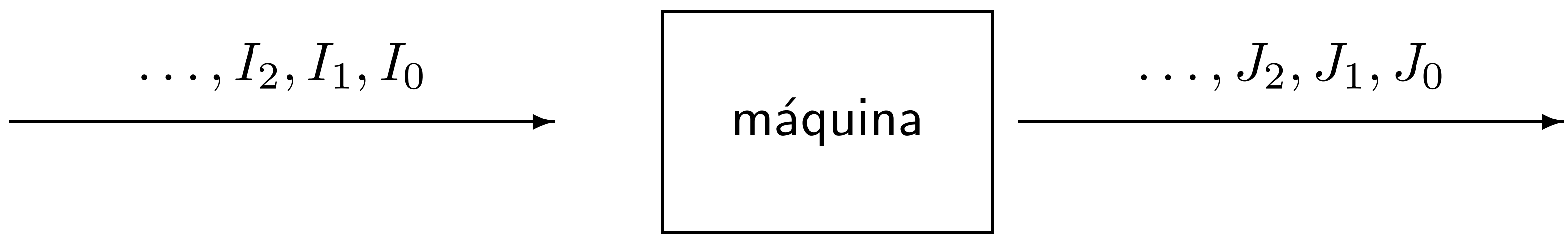
n	$\lvert e-(1+\frac{1}{n})^n\rvert$	$\lvert e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\rvert$	$\lvert e-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\rvert$	2^{-n}
1	0,718282	0,718282	0,218282	0,5
2	0,468282	0,218282	0,0516152	0,25
3	0,347911	0,0516152	0,0099485	0,125
4	0,276876	0,0099485	0,00161516	0,0625
5	0,229962	0,00161516	0,000226273	0,03125

Weihrauch-computabilidad (1)

Computación clásica: $f{:\subseteq}\, \Sigma^* \to \Sigma^*$ o $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Nombres para los reales: secuencias infinitas $(\Sigma^\omega = \{a_0 a_1 a_2 \ldots | a_i \in \Sigma\})$.

Computación para los reales $f{:\subseteq}\, \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$.



Weihrauch-computabilidad (2)

$$nombre(x) = (I_0, I_1, I_2, \ldots) \text{ donde } \begin{cases} I_n = [a, b] \text{ , } a, b \in \mathbb{Q}, \; a < b, \\ I_{n+1} \subseteq I_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n. \end{cases}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, el número x es denominado un número real Weihrauch-computable si tiene un nombre computable [11].

Ejemplo: Un número $q \in \mathbb{Q}$ es Weihrauch-computable porque el nombre $(I_0, I_1, I_2, \ldots)$ donde $I_n = [q - 2^{-n}, q + 2^{-n}]$ es un nombre computable para q.

Teorema [11]: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $x_A = \sum_{i \in A} 2^{-i}$ is Weihrauch-computable sii A es recursivo (decidible).

Turing-Cauchy-Weihrauch-computabilidad

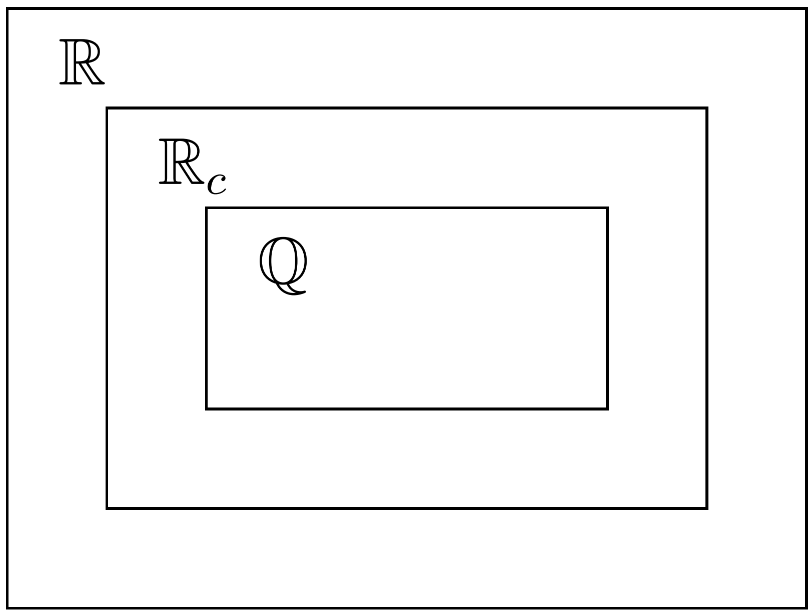
Teorema [11]:

Los conjuntos de números reales Turing-computables, Cauchy-computables y Weihrauch-computables son iguales.

Campo $< \mathbb{R}_c, +, \cdot, 0, 1, \triangleright >$

$\mathbb{R}_c$: Conjunto de números reales computables

Teorema [1, 11]: La estructura $< \mathbb{R}_c, +, \cdot, 0, 1, \triangleright >$ es un campo ordenado, arquimediano e incompleto.



Aplicaciones de $\mathbb{R}_c$ (1)

Análisis computable [11]: $\begin{cases} \text{Funciones reales computables.} \\ \text{Recursividad (decidibilidad) para } A \subseteq \mathbb{R}. \\ \text{Complejidad computacional real.} \\ \text{Espacios métricos computables.} \\ \vdots \end{cases}$

Modelos MT: $\begin{cases} \delta\colon Q \times \Sigma \times \Sigma \times M \times Q \to \{0,1\} \text{ (MT deterministas) [9, 5].} \\ \delta\colon Q \times \Sigma \times \Sigma \times M \times Q \to \mathbb{R}_c \text{ (MT probabilistas) [4, 6].} \\ \delta\colon Q \times \Sigma \times \Sigma \times M \times Q \to \mathbb{C}_c \text{ (MT cuánticas) [3, 6].} \end{cases}$

Aplicaciones de $\mathbb{R}_c$ (2)

Hipercomputación:

> *"A hypercomputer is any information-processing device able to carry out tasks that cannot be carried out by a standard universal Turing machine"*. [2]

Modelos hipercomputación: $\begin{cases} \text{Máquinas de Turing oráculos [10, 7].} \\ \text{Redes neuronales recurrentes análogas [8, 7].} \end{cases}$

[1] Douglas S. Bridges. “Computability: A Mathematical Sketchbook”, tomo 146 de “Graduate Texts in Mathematics”. Springer-Verlag (1994).

[2] B. Jack Copeland y Gordon Aston. Hypercomputation. Eprint: `www.alanturing.net/pages/Reference\%20Articles/hypercomputation/`, [20-Jun-2000] (2001).

[3] David Deutsch. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97–117 (1985).

[4] John Gill. Computational complexity of probabilistic Turing machines. *SIAM J. Comput.* **6**(4), 675–695 (december 1977).

[5] Raúl Gómez Marín y Andrés Sicard Ramírez. “Informática Teórica: Elementos propedeúticos”. Medellín: Fondo Editorial U. EAFIT (2001).

[6] Andrés Sicard y Mario Vélez. Some relations between quantum Turing machines and Turing machines. (Draft) (1999).

[7] Andrés Sicard Ramírez, Juan C. Agudelo Agudelo y Mario E. Vélez Ruiz. Redes neuronales recurrentes análogas con pesos reales. (Draft) (2000).

[8] Hava T. Siegelmann. Computation beyond the Turing limit. *Science* **268**, 545–548 (28 april 1995).

[9] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.* **42**, 230–265 (1936-7). A correction, ibid, vol. 43, no. 2198, p. 544–546, 1937.

[10] Alan M. Turing. Systems of logic based on ordinales. *Proc. London Math. Soc.* **45**(2239), 161–228 (1939).

[11] Klaus Weihrauch. “Computable Analysis: An Introduction”. Berlin: Springer-Verlag (2000). Eprint: `www.informatik.fernuni-hagen.de/import/thi1/klaus.weihrauch/book.html`.