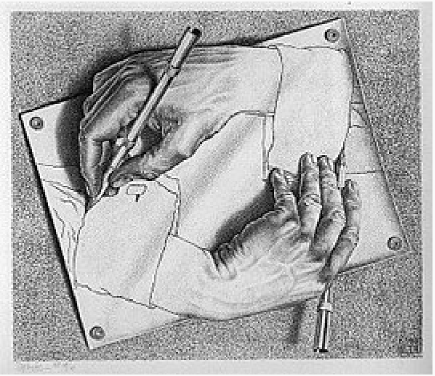
Limitaciones de la autorreferencia

Andrés Sicard Ramírez
Universidad EAFIT

Maestría en Matemáticas Aplicadas - 50 años
Universidad EAFIT
25 de octubre de 2023

Introducción

Autorreferencia



M. C. Escher. Manos dibujando. 1948.

Autorreferencia

(i) Lawvere [1963]. «Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories».

(ii) Yanofsky [2003]. «A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points».

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(i) $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}\,\mathbb{N}$ (el conjunto de los números reales y el conjunto de partes de los números naturales son equipotentes).

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(i) $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}\,\mathbb{N}$ (el conjunto de los números reales y el conjunto de partes de los números naturales son equipotentes).

(ii) No existe una función sobreyectiva

$$\mathbb{N} \to \mathcal{P}\,\mathbb{N}.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(iii) Sea $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ un conjunto de posibles «valores de verdad» y sea A un conjunto. La función característica de A está definida por:

$$\chi_A : A \to \mathbf{2}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A; \\ 1, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

(iv) $\mathcal{P}\,\mathbb{N} \cong \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (el conjunto de partes de los números naturales y el conjunto de las funciones características sobre los números naturales son equipotentes).

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(iv) $\mathcal{P}\,\mathbb{N} \cong \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (el conjunto de partes de los números naturales y el conjunto de las funciones características sobre los números naturales son equipotentes).

(v) No existe una función sobreyectiva

$$\mathbb{N} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}.$$

(vi) Sea $\mathbf{1} = \{0\}$, $\mathbf{3} = \{0, 1, 2\}$ y $\mathbf{42} = \{0, 1, \ldots, 41\}$.

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(vi) Sea $\mathbf{1} = \{0\}$, $\mathbf{3} = \{0, 1, 2\}$ y $\mathbf{42} = \{0, 1, \ldots, 41\}$.

(vii) Sea T un conjunto. No existen funciones sobreyectivas

$$T \to \mathbf{2}^T,$$
$$T \to \mathbf{3}^T,$$
$$T \to \mathbf{42}^T,$$

pero si existe una función sobreyectiva

$$T \to \mathbf{1}^T.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(vii) Un conjunto Y es «no degenerado» o «no trivial» si sus elementos pueden ser intercambiados, es decir, existe una función de Y en Y sin puntos fijos

$$\alpha : Y \to Y$$

$$\alpha(y) \neq y, \text{ para todo } y \in Y.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(vii) Un conjunto Y es «no degenerado» o «no trivial» si sus elementos pueden ser intercambiados, es decir, existe una función de Y en Y sin puntos fijos

$$\alpha : Y \to Y$$
$$\alpha(y) \neq y, \text{ para todo } y \in Y.$$

(viii) Sea T un conjunto y sea Y un conjunto no degenerado. No existe una función sobreyectiva

$$T \to Y^T.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(ix) (Des)currificar. Una función de orden superior

$$\widehat{f} : T \to Y^T = T \to (T \to Y) \qquad \text{(función currificada)},$$

puede expresarse como una función de primer orden

$$f : T \times T \to Y \qquad \text{(función no currificada)}$$

donde

$$\begin{aligned} f(-, t') &= \widehat{f}(t') \quad : T \to Y, \\ f(t, t') &= \widehat{f}(t')(t) : Y \end{aligned}$$

(x) Sean $f : T \times T \to Y$, $g : T \to Y$ y $t \in T$. La función g es «representable por t» si

$$g(-) = f(-, t).$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(xi) Si $\widehat{f} : T \to Y^T$ es una función no sobreyectiva entonces existe una función $g : T \to Y$ no representable. Es decir, para todo $t' \in T$, existe $t \in T$, tal que

$$g(t) \neq f(t, t') = \widehat{f}(t')(t).$$

Teorema de Cantor

Teorema de Cantor

Si Y es un conjunto y existe una función $\alpha : Y \to Y$ sin un punto fijo, entonces para todos los conjuntos T y todas las funciones $f : T \times T \to Y$ existe una función $g : T \to Y$ que no es representable por f, es decir,

$$g(-) \neq f(-, t), \quad \text{para todo } t \in T.$$

Teorema de Cantor

Demostración.

Sea Y un conjunto y sea $\alpha : Y \to Y$ una función sin un punto fijo. Existe una función $\Delta : T \to T \times T \coloneqq t \mapsto (t, t)$. La función $g : T \to Y$ se obtiene por la composición de tres funciones.

$$
\begin{tikzcd}
T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
T \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
g &\coloneqq \alpha \circ f \circ \Delta \\
g(t) &= \alpha(f(t, t)).
\end{aligned}
$$

La función g no es representable por f, de lo contrario, para algún $t \in T$

$$f(t, t) = g(t) = \alpha(f(t, t)),$$

lo cual sería una contradicción porque $f(t, t)$ sería un punto fijo de α. $\square$

Teorema de Cantor

Si Y es un conjunto y existe una función $\alpha : Y \to Y$ sin un punto fijo, entonces para todos los conjuntos T y todas las funciones $f : T \times T \to Y$ existe una función $g : T \to Y$ que no es representable por f, es decir, $g(-) \neq f(-, t)$, para todo $t \in T$.

Limitaciones de la autorrefencia

«*On a philosophical level, this generalized Cantor's theorem says that as long as the truth-values or properties of T are non-trivial, there is no way that a set T of things can "talk about" or "describe" their own truthfulness or their own properties. In other words, there must be a limitation in the way that T deals with its own properties.*» [Yanofsky 2003, págs. 363–4]

Instancias del teorema de Cantor

(i) El teorema de la diagonalización de Cantor
No existe una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathcal{P}\,\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{N} \not\cong \mathcal{P}\,\mathbb{N}$.

Instancias

(i) El teorema de la diagonalización de Cantor
No existe una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathcal{P}\,\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{N} \ncong \mathcal{P}\,\mathbb{N}$.

(ii) La paradoja de Russell
El conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, es y no es un miembro de sí mismo.

Instancias

(iii) La paradoja de Grelling

Un adjetivo es heterológico si no se describe a sí mismo. Por ejemplo, «largo» y «monosilábico» son adjetivos heterológicos.

El adjetivo «heterológico» es y no es heterológico.

Instancias

(iii) La paradoja de Grelling

Un adjetivo es heterológico si no se describe a sí mismo. Por ejemplo, «largo» y «monosilábico» son adjetivos heterológicos.

El adjetivo «heterológico» es y no es heterológico.

(iv) Un lenguaje no recursivamente (computablemente) enumerable.

Existe un lenguaje que no es aceptado por ninguna máquina de Turing.

Instancias

(iii) La paradoja de Grelling

Un adjetivo es heterológico si no se describe a sí mismo. Por ejemplo, «largo» y «monosilábico» son adjetivos heterológicos.

El adjetivo «heterológico» es y no es heterológico.

(iv) Un lenguaje no recursivamente (computablemente) enumerable.

Existe un lenguaje que no es aceptado por ninguna máquina de Turing.

(v) Otras instancias

Véase [Lawvere 1963; Yanofsky 2003].

Referencias

Referencias

Lawvere, F. William (1963). Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories. En: Category Theory,Homology Theoryand their Applications II. Ed. por Hilton, Peter. Vol. 92. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, págs. 134-145. DOI: 10.1007/BFb0080769.

Yanofsky, Noson S. (2003). A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points. The Bulletin of Symbolic Logic 19.3, págs. 362-386. URL: 10.2178/bsl/1058448677.

¡Gracias!