Hipercomputación desde la computación cuántica

Andrés Sicard

Grupo de Lógica y Computación
Universidad EAFIT, Medellín

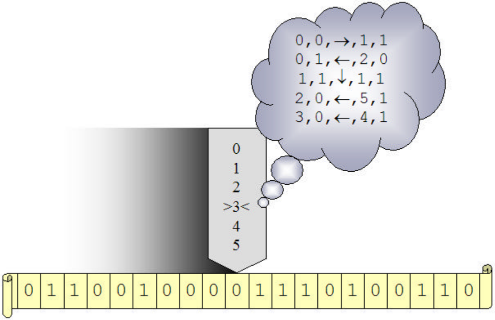
III Encuentro Regional de Lógica y Computación - LOGyCO 2006. Universidad del Cauca, Popayán

Resumen

Un hipercomputador computa funciones que no pueden ser computadas por una máquina de Turing. Tien D. Kieu ha propuesto un algoritmo hipercomputacional cuántico, el cual resuelve en principio el décimo problema de Hilbert. Se realiza un análisis del algoritmo de Kieu y se establece que está sustentado en ciertas propiedades del álgebra dinámica empleada y en una cierta aplicación del teorema adiabático. Con base en el análisis realizado, se presenta una adaptación algebraica del algoritmo de Kieu, es decir, se presenta un algoritmo *à la* Kieu sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$. Debido a que esta álgebra admite realizaciones en diferentes sistemas cuánticos, la adaptación realizada amplia el espectro de posibilidades de implementación del algoritmo.

Computabilidad: los años fundacionales I

Máquina de Turing (1936)



Computabilidad: los años fundacionales II

Las equivalencias

máquinas de Turing $\equiv$ máquinas de Post $\equiv$ λ-cálculo $\equiv$ funciones recursivas

Tesis de Church-Turing

"*Any procedure than can be carried out by an idealised human clerk working mechanically with paper and pencil can also be carried out by a Turing machine.*"

Una función es efectivamente calculable si y sólo si es computable por una máquina de Turing

Incomputable-(Turing Machine) problem

Hilbert's tenth problem

Given a Diophantine equation

$$D(x_1, \ldots, x_k) = 0 \ ,$$

we should build a procedure to determine whether or not this equation has a solution in $\mathbb{N}$.

Classical solution (Matiyasevich, Davis, Robinson, Putnam) [Mat93]

$$\boxed{\text{Hilbert's tenth problem}} \equiv \boxed{\text{Halting problem for Turing Machine}}$$

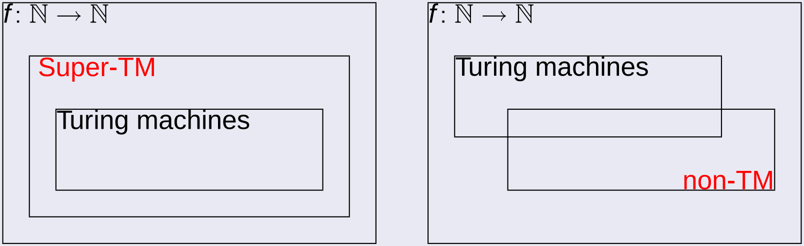
Hypercomputation I

Definition

A hypercomputer is any machine (theoretical or real) that compute functions or numbers, or more generally solve problems or carry out tasks, that cannot be computed or solved by a Turing machine (TM) [Cop02].

Hypercomputation II

Types



Hypercomputation III

Examples

- Oracle Turing Machine (Turing)
- Accelerating Turing machine (Copeland)
- Analog Recurrent Neural Network (Sielgelmann and Stong)
- $\vdots$

Implementation

The possibility of real construction of a hypercomputer is controversial and is still under analysis.

Computación cuántica estándar (CCE) I

$1, 2, \ldots, n$-qubits

n-qubit	base computacional	*dim*
1-qubit	$\{\vert 0\rangle, \vert 1\rangle\}$	2^1
2-qubit	$\{\vert 00\rangle, \vert 01\rangle, \vert 10\rangle, \vert 11\rangle\}$ $\{\vert 0\rangle_2, \vert 1\rangle_2, \vert 2\rangle_2, \vert 3\rangle_2\}$	2^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-qubit	$\{\vert 0\rangle_n, \ldots, \vert 2^{n-1}\rangle_n\}$	2^n

Crecimiento lineal en el número de qubits
vs
Crecimiento exponencial en el espacio computacional

Computación cuántica estándar (CCE) II

Compuertas cuánticas

- Operadores lineales

$$U(\alpha |x\rangle + \beta |y\rangle) = \alpha U |x\rangle + \beta U |y\rangle$$

- Operadores unitarios de evolución

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

- Reversibles

$$\text{Si } U |x\rangle = |x'\rangle, \text{ entonces } U^\dagger |x'\rangle = |x\rangle$$

Computación cuántica estándar (CCE) III

Example (Compuerta de Hadamard)

$$U_H \,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0\rangle + |\,1\rangle)$$
$$U_H \,|\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0\rangle - |\,1\rangle)$$

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Computación cuántica estándar (CCE) IV

CCE y complejidad algorítmica

- Shor (1994): Factorizar un número en sus factores primos (mejora de tipo exponencial)
- Grover (1996): Busqueda en una base de datos desorganizada (mejora de tipo polinomial)

CCE y computabilidad

$$\boxed{\text{Máquina de Turing clásica}} \equiv \boxed{\text{Máquina de Turing cuántica}}$$

Computación cuántica estándar (CCE) V

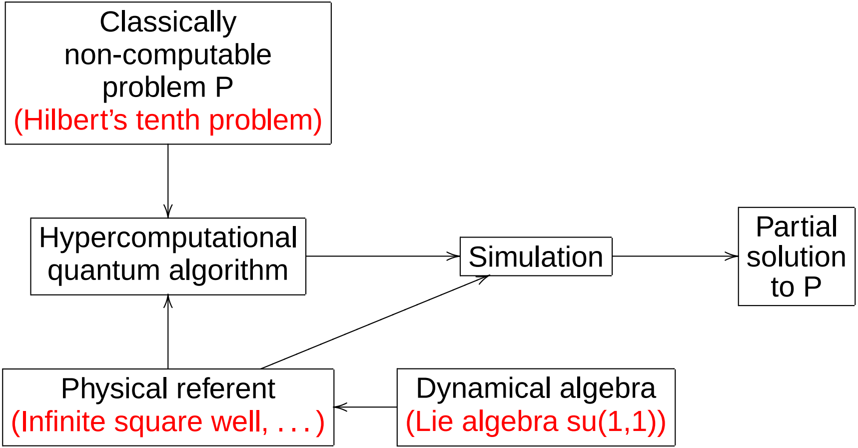
Excepción: generación de verdaderos números aleatorios

1. $U_H \,|\, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\, 0\rangle + |\, 1\rangle)$
2. We observe the superposition state. *“The act of observation causes the superposition to collapse into either* $|\, 0\rangle$ *or the* $|\, 1\rangle$ *state with equal probability. Hence you can exploit quantum mechanical superposition and indeterminism to simulate a perfectly fair coin toss.*” [WC97, p. 160]

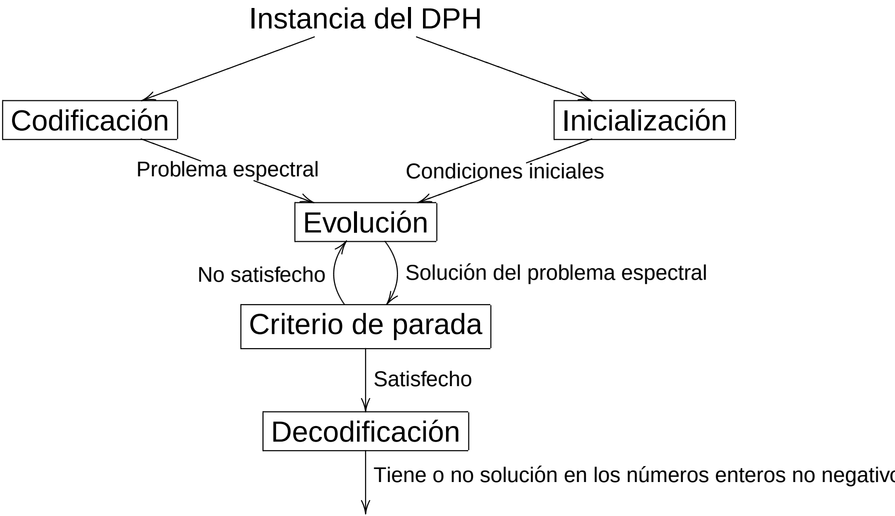
La no equivalencia

$$\text{CCE} \not\equiv \text{Computación cuántica}$$

Key ideas: Hypercomputational quantum algorithm *à la* Kieu [Kie05, SOV05, SVO05, SOV06]



Estructura general del algoritmo



Codificación-Decodificación I

- Computational basis

$$\mathfrak{F}^{\mathfrak{su}(1,1)} = \{|\, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$|\,0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |\,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |\,2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \ldots,$$

- Dynamical Lie algebra $\mathfrak{su}(1,1)$

$$[K_-, K_+] = K_3 \ , \qquad [K_\pm, K_3] = \mp 2K_\pm$$

Codificación-Decodificación II

- Infinite-dimensional irreducible representation for $\mathfrak{su}(1,1)$

$$K_+ \,|\, n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+3)}\,|\, n+1\rangle \text{ (creation operator)} \;,$$
$$K_- \,|\, n\rangle = \sqrt{n(n+2)}\,|\, n-1\rangle \text{ (annihilation operator)} \;,$$
$$K_3 \,|\, n\rangle = (2n+3)\,|\, n\rangle \text{ (Cartan operator)} \;.$$

- Number operator

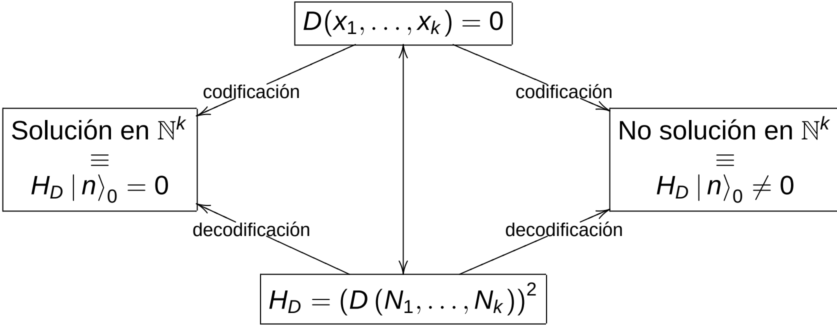
$$N = (1/2)(K_3 - 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \;,$$

$$N \,|\, n\rangle = n \,|\, n\rangle \;.$$

Codificación-Decodificación III

- Barut-Girardello coherent states ($K_- \,|\, z\rangle = z \,|\, z\rangle$, with $z \in \mathbb{C}$):

$$|\, z\rangle = \frac{|z|}{\sqrt{I_2(2\,|z|)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!(n+2)!}} \,|\, n\rangle \quad .$$

- 

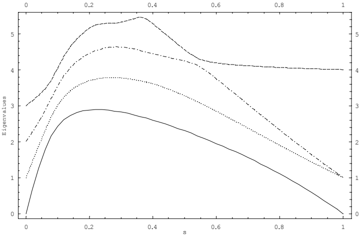
Evolución

New problem

To find the ground state $|\{n\}\rangle_0$ of H_D.

Solution *à la* Kieu: adiabatic quantum computation

$$H_\mathrm{A}(t) = (1 - t/T)H_\mathrm{I} + (t/T)H_\mathrm{D} \text{ over } t \in [0, T]$$



Inicialización

$$\begin{tikzcd}
D(x_1,\dots,x_k)=0 \arrow[d, "k"] & \\
\boxed{\text{Inicialización}} \arrow[r] \arrow[d] & |\psi(0)\rangle = |z_1\rangle\otimes\cdots\otimes|z_k\rangle \arrow[dl, leftrightarrow, "H_I|\psi(0)\rangle=0"] \\
H_I = \sum_{j=1}^{k}(K_{+_j} - z_j^*\mathbb{1})(K_{-_j} - z_j\mathbb{1}) &
\end{tikzcd}$$

Criterio de parada

1. Measure through the time-dependent Schrödinger equation $i\partial_t \,|\, \psi(t)\rangle = H_{\mathrm{A}}(t)\,|\,\psi(t)\rangle\,,$ for $t \in [0, T]$ the maximum probability

$$P_{\max}(T) = \max_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k} |\langle\psi(T) \mid n_1,\ldots,n_k\rangle|^2$$
$$= \left|\langle\psi(T) \mid \{n\}\rangle_0\right|^2 \quad .$$

2. If $P_{\max}(T) \leq 1/2$, increase T and repeat all the steps above .
3. If $P_{\max}(T) > 1/2$ (halting criterion) then $|\,\{n\}\rangle_0$ is the ground state of H_{D} (assuming no degeneracy).

El algoritmo

Entrada: Ecuación Diofantina $D(x_1, \ldots, x_k) = 0$
Salida: Determina si la ecuación $D(x_1, \ldots, x_k) = 0$ tiene o no solución en $\mathbb{N}^k$

begin
  $H_D \leftarrow \text{Codificacion}(D(x_1, \ldots, x_k) = 0)$ `REM` $H_D = D(N_1, N_2, \ldots, N_k)^2$
  $V_I \leftarrow \text{Inicializacion}(k)$ `REM` $V_I = W_1 \otimes \cdots \otimes W_k$
  $H_I \leftarrow \text{Inicializacion}(k)$ `REM` $H_I = \sum_{j=1}^{k} (a_j^\dagger - w_j^* \mathbb{1})(a_j - w_j \mathbb{1})$
  $T \leftarrow 0$ **repeat**
    $T \leftarrow T + \mathit{incremento}$
    $H_A(t) \leftarrow \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_I + \left(\frac{t}{T}\right) H_D$
    $V_F \leftarrow \text{Evolucion}(H_A(t), T)$ `REM` $V_F = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_1 \ldots n_k}(T) e_{n_1} \otimes \cdots \otimes e_{n_k}$
    $P_{\text{máx}}(V_F) \leftarrow \text{máx} \left\{ P_{n_1 \ldots n_k}(V_F) \mid (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \right\}$ `REM` $P_{n_1 \ldots n_k}(V_F) = |C_{n_1 \ldots n_k}(T)|^2$
  until $P_{\text{máx}}(V_F) \leq 1/2$
  if $H_D V_F = 0$ **then**
    return La ecuación $D(x_1, \ldots, x_k) = 0$ tiene solución en $\mathbb{N}^k$
  else
    return La ecuación $D(x_1, \ldots, x_k) = 0$ no tiene solución en $\mathbb{N}^k$
end

Conclusiones I

- La hipercomputación teórica existe como lo evidencian los diferentes modelos propuestos.
- Características de la hipercomputabilidad del algoritmo de Kieu:
  - Resuelve un problema incomputable por una máquina de Turing
  - Empleo del teorema adiabático de la mecánica cuántica sobre operadores ∞-dimensionales
  - Ciertas propiedades del álgebra dinámica Weyl-Heisenberg asociada al oscilador armónico cuántico

Conclusiones II

- Caraterísticas algebraicas del algoritmo de Kieu:
    - Admitir una representación infinita-dimensional irreducible que actúa sobre la base del espacio de Hilbert asociado al Hamiltoniano del referente físico.
    - Admitir la factorización del Hamiltoniano del referente físico en términos de los generadores del álgebra.
    - Permitir la construcción de un operador número tal que sus autovectores sean los autovectores del Hamiltoniano asociado al referente físico y sus autovalores sean los números naturales $\mathbb{N}$.
    - Permitir la construcción de estados coherentes.
- Las adaptaciones algebraicas del algoritmo de Kieu sobre el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ amplian el espectro de posibilidades sobre el cual es posible considerar una implementación de éste.

Acknowledgments and contact

We thank Tien D. Kieu for helpful discussions and feedback.
This work was supported by COLCIENCIAS-EAFIT University (grant #1216-05-13576).

Andrés Sicard
email: `asicard@eafit.edu.co`
homepage:
`http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/personal`

Further reading I

B. Jack Copeland.
Hypercomputation.
Minds and Machines, 12:461–502, 2002.

Tien D. Kieu.
Hypercomputability of quantum adiabatic processes: Fact versus prejudices.
Invited paper for a special issue of the Journal of Applied Mathematics and Computation on Hypercomputation. Preprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0504101`, 2005.

Yuri V. Matiyasevich.
Hilbert's tenth problem.
Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1993.

Further reading II

Andrés Sicard, Juan Ospina, and Mario Vélez.

Numerical simulations of a possible hypercomputational quantum algorithm.

In Bernardete Ribeiro et al., editors, *Adaptive and Natural Computing Algorithms. Proc. of the International Conference in Coimbra, Portugal*, pages 272–275. SpringerWienNewYork, 21st - 23rd March 2005.

Andrés Sicard, Juan Ospina, and Mario Vélez.

Quantum hypercomputation based on the dynamical algebra $\mathfrak{su}(1,1)$.

Sometido a publicación al Journal of Physics A: Mathematical and General. Preprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0602082`, 2006.

Further reading III

Andrés Sicard, Mario Vélez, and Juan Ospina.
A possible hypercomputational quantum algorithm.
In E. J. Donkor, A. R. Pirich, and H. E. Brandt, editors, *Quantum Information and Computation III*, volume 5815 of *Proc. of SPIE*, pages 219–226. SPIE, Bellingham, WA, 2005.

Colin P. Williams and Scott H. Clearwater.
Explorations in quantum computing.
New York: Springer-Telos, 1997.