CURSO DE LÓGICAS PARACONSISTENTES

Andrés Sicard Ramírez

Especialización en Lógica y Filosofía
Departamento de Humanidades
Escuela de Ciencias y Humanidades
Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
2003-02

Capítulo 1

Paradojas, antinomias, contradicciones, . . .

*"The logics of formal inconsistency (LFIs) are paraconsistent logics which permit us to **internalize the concepts of consistency or inconsistency inside our object language**, introducing new operators to talk about them, and allowing us, in principle, **to logically separate the notions of contradictoriness and of inconsistency**"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 3).

*"…it should be clear that the point here is not about the **existence** of contradictory theories, but about **what we should do** with them!"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 3).

$$\text{Posibles causas} \begin{cases} \textit{``\ldots a correct description of a contradictory world''} \\ \textit{``\ldots temporay stage of our knowledge''} \\ \textit{``\ldots the result of conflicting observational criteria''} \\ \textit{``\ldots superpositions of worldviews''} \end{cases}$$

Paradoja ($\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\delta o\xi\alpha$) [a] :

1. Etimológicamente: "contrario a la opinión" (Ferrater 1994, pág. 2693).
2. "contrario a la opinión recibida y común (cosas que maravillan)" (Ferrater 1994, pág. 2693)
3. *"...while paradoxes will be related to the presence of inconsistencies, which* ***do not necessarily depend on negation****"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 3).

Clases $\begin{cases} \text{Psicológica (contra el sentido común)} \\ \text{Confirmación} \\ \text{Lógicas-semánticas} \\ \text{Otras (ej. el hombre condenado a ser fusilado)} \end{cases}$

---

[a] **Aporía** ($\acute{\alpha}\pi o\rho\acute{\iota}\alpha$)

1. Etimológicamente: "sin camino" o "camino sin salida" (Ferrater 1994, pág. 205).
2. "Proposición sin salida lógica, ...dificultad lógica insuperable" (Ferrater 1994, pág. 205).

Antinomia ($\acute{\alpha}\nu\tau\acute{\iota}$ = *contra*, $\nu\acute{o}\mu o\zeta$ = *ley*):

1. Etimológicamente: "Conflicto entre dos leyes" (Ferrater 1994, pág. 181).
2. "Conflicto entre dos ideas, proposiciones, actitudes, etc." (Ferrater 1994, pág. 181).
3. "Clase especial de paradojas resultante de una contradicción entre proposiciones o de las consecuencias de ellas (Ferrater 1994, pág. 2693).
4. *Now, antinomies will be related to the presence of 'strong' contradictions —those with explosive behaviour—* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 3).

Consistencia (escuela clásica):

Cantor (1899): Clasificación de las multiplicidades o conjuntos: **Inconsistentes (consistentes):** Existencia simultánea de todos sus elementos (no) lleva a contradicciones (Hilbert 1993, pág. 11).

Consistencia (escuela clásica):

Hilbert (1902): *"But above all I wish to designate the following as the most important among the numerous questions which can be asked with regard to the axioms:* ***To prove that they are not contradictory, that is, that a finite number of logical steps based upon them can never lead to contradictory results****"* (Hilbert 2000, pág. 414).

"If contradictory attributes be assigned to a concept, I say, ***that mathematically the concept does not exist*** *. . . But if it can be proved that the attributes assigned to the concept can never lead to a contradiction by the application of a finite number of logical processes, I say* ***that the mathematical existence of the concept . . . is thereby proved****"* (Hilbert 2000, pág. 414).

Un sistema es consistente en sentido sintáctico si toda proposición del sistema no es derivable en él, y lo es en sentido semántico si es realizable (Ladrière 1969, págs. 67-68).

Consistencia (otra visión):
Widerspruch $\equiv$ *contradictoriness*
Widerspruch-freiheit $\equiv$ *non-contradictoriness*
Widerspruch-freiheit-bewies $\equiv$ *proof of freedom from contradictions* $\not\equiv$ *consistency proof*

consistencia $\not\equiv$ buen comportamiento $(\neg(A \wedge \neg A))$ (da Costa)

consistencia: (noción primitiva) *"is exactly what a theory might be lacking in order to deliver triviality when exposed to a contradiction"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 6).

Clasificación de acuerdo a la consistencia (Carnielli y Marcos 2002, pág. 7):

$$\begin{cases} \text{Lógicas consistentes} \begin{cases} \text{no contradictorias} \\ \text{explosivas} \end{cases} \\ \text{Lógicas inconsistentes} \begin{cases} \text{Paraconsistentes} \begin{cases} \text{no explosivas} \\ \text{(contradictorias)} \end{cases} \\ \text{Triviales} \end{cases} \end{cases}$$

Principio de tolerancia en Matemáticas (da Costa): *"From the syntactical-semantical standpoint, every mathematical theory is admisible, unless it is trivial"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 3).

Inconsistencia: *". . . , while all believers who hold contradictory beliefs or hold a self-contradictory belief hold inconsistent belief, not all believers who hold inconsistent beliefs hold either contradictory ones or self-contradictory ones"* (Williams 1981, pág. 600).

$$\left\{\begin{array}{l} s1 \\ s2 \\ \neg(s1 \wedge s2) \end{array}\right\} \text{no contradicción} \qquad \left\{\begin{array}{l} \neg(s1 \wedge s2) \\ (s1 \wedge s2) \end{array}\right\} \text{contradicción}$$

$$\left\{\begin{array}{l} s1 \wedge s2 \wedge \neg(s1 \wedge s2) \\ (s1 \wedge s2) \wedge \neg(s1 \wedge s2) \end{array}\right\} \text{auto-contradicción}$$

Ejemplos paradojas, antinomias, ...

Paradoja del abuelo (psicológica) (Deutsch y Lockwood 1994). **Paradoja de la confirmación** (Ferrater 1994, pág. 645).

Paradojas lógica y semánticas (Ramsey-1925)[a]
Grupo A (lógicas): "*...consists of contradictions which, were there no provision made against them would ocurr in a logical or mathematical system itself. They involve only logical or mathematical terms such as class and number, and show that there must be something wrong with our logic or mathematics*" (Barbalias 2001, pág. 7)

Grupo B (semánticas): " *...are not purely logical, and cannot be stated in logical terms alone, for they all contain some reference to thought, language or symbolism, which are not formal but empirical terms*" (Barbalias 2001, pág. 7)

[a] Ramsey, Frank. The foundations of mathematics. Proc. London Math. Soc,. (1925) Ser. 2, Vol. 25.

Paradojas[a]

- Lógicas
  - Rusell (1902) (da Costa, Béziau y Bueno 1998, pág. 7), (Du
  - Cantor (1899)
  - Burali-Forti (1897)
  - Curry (1942) (Curry 1942; Beall 2002), (da Costa, Béziau y
- Semánticas
  - Del mentiroso
  - Richard (1905)
  - Berry (1906)
  - Grelling (1908)
  - P. E. B. Jourdain

[a](Mendelson 1965, págs. 2-5), (Ferrater 1994, pág. 2694)

Paradoja de Rusell (lógica):

Frege: *"Nada más descorazonador podría acontecerle a un autor científico que ver resquebrajarse uno de los pilares de su edificio tras haber dada la tarea por concluida"* [a] (Bobenrieth 1996, pág. 5).

Rusell: *"Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de sus trabajo había sido ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccinó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerce famosos"* [b] (Frege 1973, pág. 9).

[a] Gottlob Frege. Grundgesetze der Arithmetik, segundo tomo, p. 253, 1903.
[b] Jean van Heijenoort. From Frege to Gödel. Cambridge, Mass. (1967) p. 127

Rusell: *"Todas las mañanas me sentaba ante una hoja de papel en blanco. Durante todo el día, salvo un breve intervalo para comer, miraba fijamente la hoja en blanco. A menudo, cuando llegaba la noche, la hoja seguía intacta [. . .] los dos veranos de 1903 y 1904 están grabados en mi mente como un período de un absoluto estancamiento intelectal. Era evidente para mí que no podía seguir sin resolver aquellas contradicciones, y estaba resuelto a que ninguna dificultad me desviase del propósito de completar los* $Principia\ Matematica$*, pero parecía muy probable que el resto de mi vida se consumiera contemplando aquella hoja en blanco"* [a] (Bobenrieth 1996, pág. 7).

[a] Bertrand Rusell. Autobiografía, 1872-1974. Barcelona: Edhasa, (1990), p. 217.

Paradoja del mentiroso (semántica):

"Perhaps the most widely know version of the paradox, which is called the paradox of Epimenides, appears in the New Testament. St. Paul, referring to Epiminedes of Creta, says (St. Paul' epistle to Titus (I, 12)): ***One of themselves, even a prophet of their own, said, 'Cretans are always liars, evil beasts, lazy gluttons'.*** [a] " (Serény 1999, pág. 2).

[a] Dijo uno de ellos, (Epiménides, poeta célebre, natural de Creta) propio profeta de esos mismos: Son los cretenses mentiros, malignas bestias, vientres perezosos.

Capítulo 2

¿Qué es *una* lógica?

$$\textbf{Notación} \begin{cases} For^{a}\text{: Conjunto de fórmulas. } A, B \in For\text{: Fórmulas} \\ \Gamma, \Delta \subseteq For\text{: Conjuntos de fórmulas} \\ \Vdash \subseteq \mathfrak{p}(For) \times For\text{: Relación} \end{cases}$$

Definición: $\Vdash$ es una relación de consecuencia sobre el conjunto de fórmulas For si satisface (Carnielli y Marcos 2002, pág. 17):

(Con1) Reflexividad: $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash A$

(Con2) Monotonía: $(\Delta \Vdash A$ y $\Delta \subseteq \Gamma) \Rightarrow \Gamma \Vdash A$

(Con3) Transitividad: $(\Delta \Vdash A$ y $\Gamma, A \Vdash B) \Rightarrow \Delta, \Gamma \Vdash B$

---

[a] *"... but we will hereby suppose, for convenience, that For is built on a denumerable language having ¬ as its (primitive or defined) negation symbol" (Carnielli y Marcos 2002, pág. 17).*

Definición: *"A logic $\boldsymbol{L}$ will here be defined simply as a structure of the form $< For, \Vdash >$, containing a set of formulas and a consequence relation defined on this set"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 17).

Algunas observaciones para For:

1. Características de formación (Tarski) (Tarski 1956, pág. 166):
   * *"...a list or description is given in structural terms of all the signs with which the expressions of the language are formed."*
   * *"among all posible expressions which can be formed with these signs those called **sentences** are distinguished by means of purely structural properties."*

2. Estructura:
   * Multiconjunto $\neq$ conjunto $(\{A, A, B\} \neq \{A, B\})$
   * Lógicas subestructurales (Restall 2002)[a, b]

---

[a] Greg Restall. An Introduction to Substructural Logics. Australia: Routledge, 1999.
[b] Página web Restall: `www.phil.mq.edu.au/staff.html`

Algunas observaciones para $\Vdash$:

1. (Con1), (Con2) y (Con3): Tarski? (*The concept of truth in formalized languages* y *On the concept of logical consequence* (Tarski 1956).
2. Acuerdo en aceptar (Con1) y (Con3) (Béziau 2000, pág. 96), (Gabbay 1994a, pág. 182)[a], (Aczel 1994, pág. 264)[a].
3. Rechazo (Con2)[b]: Lógicas no monotónicas (Antonelli 2001).
4. Axiomas ? Reglas de inferencia?
   (a) Sintaxis: Definición de teorema.
   (b) Semántica: *"The sentence X follows logically from the sentences of the class K if and only if every model of the class K es also a model of the sentence X "* (Tarski 1956, pág. 417) (Discussión (Etchemendy 1988)).

[a] Transitividad: $(\Delta \Vdash A$ y $\Delta, A \Vdash B) \Rightarrow \Delta \Vdash B$.

[b] *Dilution:* Si $\Gamma \Vdash \Delta$, entonces $\Gamma, A \Vdash \Delta$ y $\Gamma \Vdash A, \Delta$ (adicionar una premisa o consecuencia irrelavante no afecta la relación (Hacking)) (Hacking 1979, pág. 2).

Paréntesis (Lógicas alfabares)

Las lógicas que no satisfacen **reflexividad** son denominadas lógicas alfabares[a] (Krause y Béziau 1997)).

Sea $\mathfrak{L} =< For, \Vdash >$ una lógica. Usualmente la relación $\Vdash \subseteq \mathfrak{p}(For) \times For$ es una relación de congruencia[b, c], pero este no es siempre el caso (Lógica C_1 de da Costa), entonces $\underbrace{A \Vdash A}_{\text{Reflexividad}} \neq \underbrace{A = A}_{\text{Identidad}}$. gv

---

[a]En honor del lógico persa Alfabari (Krause y Béziau 1997, pág. 334).

[b]Sea $\mathfrak{A} =< A, \{f_i\}_{i\in I} >$ un álgebra abstracta. Una relación de congruencia $\approx$ sobre $\mathfrak{A}$ es una relación de equivalencia sobre A tal que si $a_1 \approx b_1, \ldots, a_m \approx b_m$, entonces para cada función f_i se tiene que $f_i^m(a_1, \ldots, a_m) \approx f_i^m(b_1, \ldots, b_m)$, donde m es la aridad de f_i y $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_m \in A$ (Rasiowa 1974, pág. 11).

[c]En realidad es la relación restringida $\Vdash|_{For}$.

Ejemplo lógica alfabar: Sea $\mathfrak{L} =< For, \Vdash >$ una lógica tal que $\Gamma \Vdash A$ ssi $\exists \Gamma'$ ($\Gamma' \subseteq \Gamma$ y Γ' es consistentente y $\Gamma' \vdash_{LC} A$). Entonces $\{p \wedge \neg p\} \nVdash p \wedge \neg p$, por lo tanto, $A \nVdash A$, para algún $A \in FOR$.

Sistemas tipo Hilbert (Krause y Béziau 1997, pág. 335)):

1. Lógica no alfabar:
   *"A es demostrable en Γ iff there is a sequence of formulas such A es its last member and every member of sequence is **an element of** Γ or is an axiom, or is the conclusion of a rule whose premises precede it in the sequence"*.

2. Lógica alfabar:
   *"A es demostrable en Γ iff there is a sequence of formulas such A es its last member and every member of sequence is **an element of** Γ **different of** A or is an axiom, or is the conclusion of a rule whose premises precede it in the sequence"*.

   Entonces por ejemplo: $\{p \wedge q\} \Vdash p$ y $\{p \wedge q, p\} \Vdash p$, pero $\{r \wedge s, p\} \nVdash p$.

Algunas relaciones entre lógicas (Carnielli y Marcos 2002, pág. 17)

Sean $\boldsymbol{L1} =< For_1, \Vdash_1 >$ y $\boldsymbol{L2} =< For_2, \Vdash_2 >$ dos lógicas:

1. $\boldsymbol{L1}$ es una **extensión lingüística** de $\boldsymbol{L2}$ si $For_2 \subsetneq For_1$.
2. $\boldsymbol{L1}$ es una **extensión deductiva** de $\boldsymbol{L2}$ si $\Vdash_2 \subsetneq \Vdash_1$.
3. $\boldsymbol{L1}$ es una **extensión conservativa** de $\boldsymbol{L2}$ si:
   (a) $\boldsymbol{L1}$ es una extensión lingüística de $\boldsymbol{L2}$.
   (b) $\boldsymbol{L1}$ es una extensión deductiva de $\boldsymbol{L2}$.
   (c) $\Vdash_1 |_{For_2} = \Vdash_2$ (la restricción de $\Vdash_1$ al conjunto For_2 es igual a $\Vdash_2$).
4. En general, $\boldsymbol{L1}$ es una **extensión** de $\boldsymbol{L2}$ o dicho de otro modo, $\boldsymbol{L2}$ es un **fragmento** de $\boldsymbol{L1}$.

Metamatemáticas (Carnielli y Marcos 2002, págs. 17-19)

Definiciones: Sea $\boldsymbol{L} =< For, \Vdash >$ una lógica. Una **teoría** Γ de $\boldsymbol{L}$ es cualquier conjunto $\Gamma \subseteq For$. Si $\Gamma \Vdash A$, entonces A es **inferida** desde Γ en la lógica $\boldsymbol{L}$. Si $\Gamma \Vdash A$ para cualquier teoría de $\boldsymbol{L}$, entonces A es una **tesis** de $\boldsymbol{L}$.

(D-1) Una teoría Γ es **propia** si $\Gamma \neq For$.

(D0) Una teoría Γ es **cerrada** si contiene todas sus consecuencias[a].

(D1) Γ es **contradictoria** (respecto a $\neg$) si $\exists A(\Gamma \Vdash A$ y $\Gamma \Vdash \neg A)$[b].

(D2) Γ es **trivial** si $\forall B(\Gamma \Vdash B)$.

(D3) Γ es **explosiva** si $\forall A \forall B(\Gamma, A, \neg A \Vdash B)$.

---

[a] $(\Gamma \Vdash A \Rightarrow A \in \Gamma)$.

[b] Si $\Gamma \Vdash A$ y $\Gamma \Vdash \neg A$ entonces Γ es A-**contradictoria**.

Algunos teoremas:

1. Si $\{A, \neg A\} \subseteq \Gamma$, entonces Γ es A-contradictoria.
2. Si Γ es A-contradictoria y cerrada, entonces $\{A, \neg A\} \subseteq \Gamma$.
3. $(D2) \Rightarrow (D1)$: Si una teoría es trivial, entonces es contradictoria (contradicción es una condición necesaria para trivialización).
4. $(D2) \Rightarrow (D3)$: Si una teoría es trivial, entonces es explosiva (explosión es una condición necesaria para trivialización).
5. $(D1)$ y $(D3) \Rightarrow (D2)$: Si una teoría es contradictoria y explosiva, entonces es trivial (contradicción y explosión son condiones suficientes para trivialización).

Sea $\boldsymbol{L} =< For, \Vdash >$ una lógica:

(D4) $\boldsymbol{L}$ es **contradictoria** si todas sus teorías son contradictorias.

(D5) $\boldsymbol{L}$ es **trivial** si todas sus teorías son triviales.

(D6) $\boldsymbol{L}$ es **explosiva** si todas sus teorías son explosivas.

Algunos teoremas:

1. Una lógica monotónica $\boldsymbol{L}$ es contradictoria-trivial-explosiva, si y sólo si, su teoría vacía es contradictoria-trivial-explosiva.

2. $(D6) \Rightarrow ((D4) \Leftrightarrow (D5))$: Una lógica explosiva es contradictoria, si y sólo si, es trivial.

3. $(D5) \Rightarrow ((D4)$ y $(D6))$: Una lógica trival es contradictoria y explosiva.

The prospects for mathematical logic **(Buss y col. 2001)** [a]

Recursion theory (Richard Soare):

1. *" . . . the primary future growth opportunities of logic, however, clearly lie in computer science. I would make the analogy* ***that logic is to computer science what mathematics is to physics, and vice versa*** " (pág. 173)

2. *"The foundational issues addressed by reverse mathematics are important ones and we expect the contributions and approaches . . . "* (pág. 173)

3. *"I would suggest that we should look for other applications and other notions of computability appropriate to various mathematical domains as well"* (pág. 173)

---

[a] *The annual meeting of the Association for Symbolic Logic held in Urbana-Champaign, June 2000.*

Proof theory and logic for computer science (Sam Buss):

1. *Proof theory* (pág. 176)
2. *Logic for computer science* (pág. 179)

Model theory (Anand Pillay)

1. *"By inward-looking I mean the development and study of concepts, problems, etc., proper to model theory itself "* (pág. 183) (Shelah's program: stability theory)
2. *"By outward-looking I mean the use of model-theoretic methods in the study of specific structures or theories from mathematics and even from logic itself"* (pág. 183)
3. $1+2$: " *. . . model theory has assumed a rather new role, complementing the classical "foundations of mathematics"* " (pág. 184)

Set theory (Alexander Kechris)

1. *Theory of the continuum or theory of pointsets (the study of sets and functions on the reals, complex numbers, Euclidean spaces or, more generally, Polish (complete separable metric) spaces)*

    (a) *Descriptive set theory (the study of definable sets and functions on Polish spaces)*

    (b) *Theory of arbitrary pointsets*

2. *General set theory*

    (a) *The theory of large cardinals*

    (b) *The theory of small cardinals*

Capítulo 3

¿Qué es *una* negación?

P-negación, P-negación simple y P-supernegación (Peña 1993, pág. 47)):

- Valores de verdad (Peña 1993, pág. 34)
  - designado
  - antidesignado
  - designado y antidesignado
  - ni designado ni antidesignado
  - no designado
  - no antidesignado
- Espacio semántico
  - Elemento mínimo 0 antidesignado y no designado
  - Elemento máximo 1 designado y no antidesignado
  - $\leq$: relación de orden parcial
  - $/A/$: Valor de verdad de A
  - $\forall A$ $(/A/ \leq 1$ y $/A/ \geq 0)$

Un functor de **P-negación** es un functor unario $\neg$ tal que para todo A:

P1. Al menos uno de entre $/A/$ y $/\neg A/$ o bien es designado o bien no es antidesignado.

P2. Al menos uno de entre $/A/$ y $/\neg A/$ o bien es antidesignado o bien no es designado.

P3. $\begin{cases} \text{P3.1. } /A/ \text{ es designado entonces } /\neg A/ \text{ es antidesignado.} \\ \text{P3.2. } /\neg A/ \text{ es antidesignado entonces } /A/ \text{ es designado.} \end{cases}$

P4. Si $/\neg A/$ es designado, entonces $/A/$ es antidesignado.

P5. $\begin{cases} \text{P5.1. } /A/ = 0 \text{ entonces } /\neg A/ = 1. \\ \text{P5.2. } /\neg A/ = 1 \text{ entonces } /A/ = 0. \end{cases}$

P6. Si $/A/ = 1$, entonces $/\neg A/ = 0$.

P7. Si $/\neg A/ = 0$, entonces $/A/$ es designado.

Un functor de **P-negación** $\neg$ es una **P-negación simple** si para todo A:

P8. Si $/A/$ es antidesignado, entonces $/\neg A/$ es designado.

P9. $/A/ = /\neg\neg A/$.

P10. Si $/\neg A/ = 0$, entonces $/A/ = 1$.

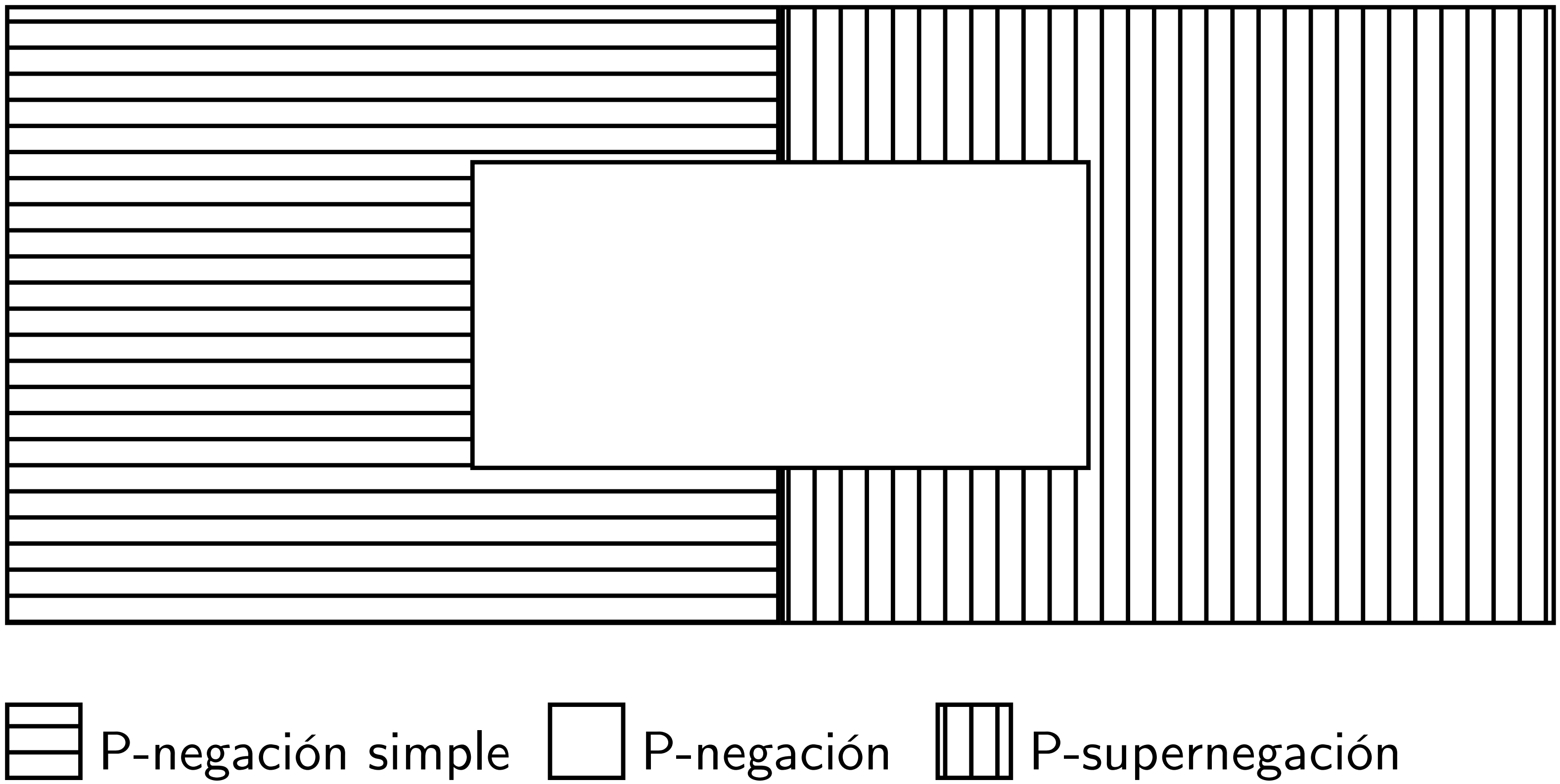
Un functor de **P-negación** $\neg$ es una **P-supernegación** si:

A. Existe algún A para el cual no cumple ninguna de las condiciones 8 a 10.

B. Para todo A:

- P11. A lo sumo uno entre $/A/$ y $/\neg A/$ es designado.
- P12. Si $/A/$ es designado, entonces $/\neg A/ \leq 0$.
- P13. Si $/\neg A/$ es designado, entonces $/A/ \leq 0$ y $1 \leq /\neg A/$.

Relaciones entre la **P-negación**, la **P-negación simple** y la **P-supernegación**:



Ejemplo 1.
Sistema: L_3^w (*Weak Variant of Lukasiewicz*) (Rescher 1969, pág. 33), los valores de verdad se encuentran en el conjunto $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$, donde 1 y $\frac{1}{2}$ son designados y 0 es antidesignado.

$$\textbf{Operador unario}\left\{\begin{array}{c|c} A & \neg A \\ \hline +1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 \\ -0 & 1 \end{array}\right.$$

P-características (Montes Gutiérrez y Restrepo Ramírez 2002, pág. 5):

P1	P2	P3.1	P3.2	P4	P5.1	P5.2	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	✓	✓

Conclusión: $\neg$ es una P-negación

Ejemplo 2.
Sistema: A_3 (Peña 1993, pág. 37), los valores de verdad se encuentran en el conjunto $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$, donde 1 es designado, $\frac{1}{2}$ es designado y antidesignado y 0 es antidesignado.

$$\textbf{Operadores unarios} \begin{cases} \begin{array}{c|c|c} A & \neg A & NA \\ \hline +1 & 0 & 0 \\ +-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -0 & 1 & 1 \end{array} \end{cases}$$

P-características (Montes Gutiérrez y Restrepo Ramírez 2002, págs. 6-7):

	P1	P2	P3.1	P3.2	P4	P5.1	P5.2	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
$\neg$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	X	✓	✓	✓
N	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	X

Conclusión: $\neg$ es una P-supernegación y N es P-negación simple.

Ejercicio 1. Determinar que tipo de P-negación son las negaciones en los siguientes sistemas:

1. Lógica clásica
2. Lógica 3-valuada de Lukasiewicz L_3 (Gómez Marín s.f., lección 1).
3. Lógica 3-valuada de Bochvar B_3 (Gómez Marín s.f., lección 5).
4. Lógica 3-valuada de Kleene K_3 (Gómez Marín s.f., lección 6).
5. Lógicas n-valuadas L_n (Gómez Marín s.f., lección 7).
6. Lógica ∞-valuada $L_{\aleph_0}$ (Gómez Marín s.f., lección 7).
7. Lógica minimal de Johansson J_3 (Gómez Marín s.f., lección ??).

Ejercicio 2. Compare las características de un operador de negación en lógica multivaluada ((Rescher 1969, págs. 122-129), (Gómez Marín s.f., lección 8)) con las características de las P-negaciones.

Problema 1. Qué tipo de negaciones son las siguientes?

$$
\textbf{Axiomas}\begin{cases}
A_1\text{: } A \to (B \to A) \\
A_2\text{: } (A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (B \to C) \\
A_3\text{: } (A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \\
A_4\text{: } \neg(A \to A) \to B \\
A_5\text{: } (\neg A \to A) \to A
\end{cases}
$$

$$
\textbf{Negaciones}\begin{cases}
\text{Contrapositiva:}\{A_1, A_2, A_3\} \\
\text{Intuicionista:}\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \\
\text{Clásica:}\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}
\end{cases}
$$

Posibles negaciones veritativo-funcionales para lógicas 2-valuadas:

A	$N_1^2 A$	$N_2^2 A$	$N_3^2 A$	$N_4^2 A$
$+1$	0	1	1	0
-0	0	1	0	1

P-características:

	P1	P2	P3.1	P3.2	P4	P5.1	P5.2	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
N_1^2	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	X	X	X	✓	✓	✓
N_2^2	✓	X	X	✓	X	✓	X	X	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_3^2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	✓	X	X	X	X
N_4^2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Conclusiones: N_1^2, N_2^2 y N_3^2 no son P-negaciones, N_4^2 (negación clásica) es una P-negación simple.

Ejercicio 3. Determinar las P-características para la asignación $\{-1, +0\}$.

Posibles negaciones veritativo-funcionales para lógicas 3-valuadas:

A	$N_1^3 A$	$N_2^3 A$	$N_3^3 A$	$N_4^3 A$	$N_5^3 A$	$N_6^3 A$	$N_7^3 A$	$N_8^3 A$
$+1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$+\frac{1}{2}$	0	0	1	1	0	0	1	1
-0	0	1	0	1	0	1	0	1

$N_9^3 A$	$N_{10}^3 A$	$N_{11}^3 A$	$N_{12}^3 A$	$N_{13}^3 A$	$N_{14}^3 A$	$N_{15}^3 A$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$N_{16}^3 A$	$N_{17}^3 A$	$N_{18}^3 A$	$N_{19}^3 A$	$N_{20}^3 A$	$N_{21}^3 A$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

$N_{22}^3 A$	$N_{23}^3 A$	$N_{24}^3 A$	$N_{25}^3 A$	$N_{26}^3 A$	$N_{27}^3 A$
0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0

P-características:

	P1	P2	P3.1	P3.2	P4	P5.1	P5.2	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
N_2^3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	✓	✓
N_9^3	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	✓	✓
N_{22}^3	✓	X	X	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	X
N_1^3	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	X	X	X	✓	✓	✓
N_{16}^3	✓	X	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_{11}^3	✓	X	X	✓	X	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_4^3	✓	X	X	✓	X	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_8^3	✓	X	X	✓	X	✓	X	X	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_{18}^3	✓	X	X	✓	X	✓	X	X	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_{15}^3	✓	X	X	✓	X	X	✓	X	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_{20}^3	✓	X	X	✓	X	✓	X	X	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_{23}^3	✓	X	X	✓	X	X	X	✓	✓	✓	X	✓	X	X	X
N_{26}^3	✓	X	X	✓	X	✓	X	✓	✓	✓	X	X	X	X	X

Conclusiones: N_2^3 es una P-supernegación, ninguna de las otras es una P-negación, además $N_8^3 = N_{18}^3$.

P-características (continuación (1)):

	P1	P2	P3.1	P3.2	P4	P5.1	P5.2	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
N_6^3	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	$\checkmark$	X	X	X	X	X
N_{17}^3	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X	$\checkmark$	$\checkmark$	X	$\checkmark$	X	X	X
N_{19}^3	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X	$\checkmark$	$\checkmark$	X	$\checkmark$	X	X	X
N_{21}^3	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X	$\checkmark$	$\checkmark$	X	$\checkmark$	X	X	X
N_{13}^3	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	$\checkmark$	$\checkmark$	X	X	X	X	X
N_{24}^3	$\checkmark$	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	X	X	X	X
N_3^3	X	X	X	X	X	X	X	$\checkmark$	X	X	X	$\checkmark$	X	X	X
N_{10}^3	X	X	X	X	X	X	$\checkmark$	$\checkmark$	X	X	X	X	X	X	X

Conclusiones: Ninguna es una P-negación, además $N_{17}^3 = N_{19}^3 = N_{21}^3$.

P-características (continuación (2)):

	P1	P2	P3.1	P3.2	P4	P5.1	P5.2	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
N^3_{12}	X	X	X	X	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X	X	X	X	X
N^3_{14}	X	X	X	X	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X	X	X	X	X
N^3_{25}	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X
N^3_{27}	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$\checkmark$	X	X	X	X
N^3_{5}	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
N^3_{7}	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Conclusiones: Ninguna es una P-negación, además $N^3_{12} = N^3_{14}$, $N^3_{25} = N^3_{27}$ y $N^3_5 = N^3_7$.

Ejercicio 4. Determinar las P-características para la asignaciones:

1. $\{+1, -\frac{1}{2}, -0\}$.
2. $\{+1, + - \frac{1}{2}, -0\}$.
3. $\{+1, \frac{1}{2}, -0\}$.

R-negación, R-negación normal, R-negación natural, R-K-negación y R-negación inversa (Rescher 1969, págs. 122-129)):

Un functor de **R-negación** es un functor unario $\neg$ tal que para todo A:

$$\text{R1.}\quad\begin{cases}\text{R1.1.} & \text{Si } /A/ \text{ es designado entonces } /\neg A/ \text{ es no designado,}\\ & \text{excepto cuando } /A/ = /\neg A/.\\ \text{R1.2.} & \text{Si } /\neg A/ \text{ es antidesignado entonces } /A/ \text{ es no antidesignado,}\\ & \text{excepto cuando } /A/ = /\neg A/.\end{cases}$$

Un functor de **R-negación** $\neg$ es una **R-negación normal** si para todo A:

R2. $/A/$ y $/\neg A/$ tiene un comportamiento clásico para los valores 0 y 1.

Un functor de **R-negación** $\neg$ es una **R-negación natural** si para todo A:

R3. $/A/ \neq /\neg A/$.

Un functor de **R-negación** $\neg$ es una **R-K-negación** si:

R4. Los valores de verdad clásicos $(0, 1)$ son obtenidos y producen únicamente valores de verdad clásicos.

Un functor de **R-negación** $\neg$ es una **R-negación inversa** si:

R5. Si los valores de verdad satisfacen la relación de orden $\leq$, entonces su negación satisface la relación de orden inversa.

R-características para N_1^2, N_2^2, N_3^2 y N_4^2:

	R1.1	R1.2	R2	R3	R4	R5
N_1^2	✓	✓	X	X	✓	X
N_2^2	✓	✓	X	X	✓	X
N_3^2	✓	✓	X	X	✓	X
N_4^2	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Conclusiones:

1. N_1^2, N_2^2, N_3^2 y N_4^2 son R-negaciones.
2. N_4^2 (negación clásica) es un R-negación normal, R-negación natural, R-K-negación y R-negación inversa.

Ejercicio 5. Determinar las R-características para la asignación $\{-1, +0\}$.

R-características para $N_i^3, i = 1, \ldots, 27$:

	R1.1	R1.2
N_1^3	✓	✓
N_2^3	✓	✓
N_3^3	✓	✓
N_4^3	✓	✓
N_5^3	✓	✓
N_6^3	✓	✓
N_7^3	✓	✓
N_8^3	✓	✓
N_9^3	✓	✓

	R1.1	R1.2
N_{10}^3	✓	✓
N_{11}^3	✓	✓
N_{12}^3	X	✓
N_{13}^3	X	✓
N_{14}^3	X	✓
N_{15}^3	X	✓
N_{16}^3	X	✓
N_{17}^3	X	✓
N_{18}^3	X	✓

	R1.1	R1.2
N_{19}^3	✓	✓
N_{20}^3	✓	✓
N_{21}^3	✓	✓
N_{22}^3	✓	✓
N_{23}^3	✓	✓
N_{24}^3	✓	✓
N_{25}^3	✓	✓
N_{26}^3	X	✓
N_{27}^3	X	✓

Conclusiones: De N_1^3 a N_{11}^3 y de N_{19}^3 a N_{25}^3 son R-negaciones.

R-características para N_i^3 (continuación):

	R2	R3	R4	R5
N_1^3	X	X	X	X
N_2^3	✓	✓	X	X
N_3^3	X	X	X	X
N_4^3	✓	✓	X	X
N_5^3	X	X	X	X
N_6^3	X	X	X	X
N_7^3	X	X	X	X
N_8^3	X	X	X	X
N_9^3	X	✓	X	X

	R2	R3	R4	R5
N_{10}^3	X	X	✓	X
N_{11}^3	X	X	X	X
N_{19}^3	X	X	X	X
N_{20}^3	X	X	✓	X
N_{21}^3	X	X	X	X
N_{22}^3	✓	X	✓	X
N_{23}^3	X	✓	X	X
N_{24}^3	X	X	X	X
N_{25}^3	X	X	X	X

Conclusiones:

1. N_2^3, N_4^3 y N_{22}^3 son R-negaciones normales.
2. N_2^3 N_4^3, N_9^3 y N_{23}^3 son R-negaciones naturales.
3. N_{10}^3, N_{20}^3 y N_{22}^3 son R-K-negaciones.
4. N_{22}^3 es una R-negación inversa.

Ejercicio 6. Determinar las R-características para la asignaciones: $\{+1, -\frac{1}{2}, -0\}$, $\{+1, +-\frac{1}{2}, -0\}$ y $\{+1, \frac{1}{2}, -0\}$.

¿Qué es *una* negación paraconsistente?

Criterios **negativos** y **positivos** (Béziau 2000, 2002)):

Criterios negativos:

Principio de explosión o principio de Pseudo-Scotus o *ex contradictione sequitur quod libet* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 19):

$$\forall \Gamma\ \forall A\ \forall B\ (\Gamma, A, \neg A \Vdash B) \quad (PPS)$$

Común acuerdo: Todas las negaciones paraconsistentes rechazan PPS ((Béziau 2000, pág. 97), (Béziau 2000, pág. 474)). Es decir, sea $\neg$ un operador unario de una lógica $\boldsymbol{L} =< For, \Vdash >$, entonces $\neg$ es un operador de negación paraconsistente si **al menos**:

$$\exists \Gamma\ \exists A\ \exists B\ (\Gamma, A, \neg A \nVdash B) \quad (PL2)$$

Refinamientos de PPS:

1. Respecto al consecuente (Béziau 2000, págs. 99-100)

   (a) $(PPS) \not\equiv \forall\Gamma\, \forall A\, \forall B\, (\Gamma, A, \neg A \Vdash \neg B)$ (lógica minimal de Johansson J_3).

   (b) $(PPS) \not\equiv \forall\Gamma\, \forall A\, \forall B\, (\Gamma, A, \neg A \Vdash \neg\neg B)$

   (c) $(PPS) \not\equiv \forall\Gamma\, \forall A\, \forall B\, \forall C\, (\Gamma, A, \neg A \Vdash B \to C)$

   (d) En general, $(PPS) \not\equiv \forall\Gamma\ \forall A\ \forall A_1 \ldots \forall A_n\ (\Gamma, A, \neg A \Vdash\ f(A_1, \ldots A_n))$; donde $f(A_1, \ldots, A_n)$ es una fórmula formada con las fórmulas $A_1, \ldots, A_n$.

2. Respecto al antecedente (Béziau 2000, pág. 100) $(PPS) \not\equiv \forall\Gamma\, \forall A\, \forall B\, (\Gamma, \neg A, \neg\neg A \Vdash B)$ (lógica de Sette, lógicas paraconsistentes atómicas)

Insuficiencia de los criterios negativos: Operadores modales, operador identidad (lógica clásica sería paraconsistente) (Béziau 2000, pág. 100).

Criterios positivos (problemas) (Béziau 2002, pág. 474):

1. ¿Cuáles propiedades son **suficientes** para definir una negación?
2. Compatibilidad entre ellas (en particular con el rechazo de (PPS)).

Algunos criterios positivos:

1. Criterio positivo de da Costa: Adicionar todas las propiedades clásicas que son compatibles con el rechazo de (PPS) (Béziau 2000, pág. 101).
2. Auto-extensionabilidad (teorema de sustitución): Si dos fórmulas son equivalentes también lo es su negación (Béziau 2000, pág. 101). Lógicas sin auto-extensionalidad: $C1$ de da Costa, lógica LP de Priest, lógica J_3 minimal de Johansson (Béziau 2002, pág. 477).
3. Representabilidad (veritativo funcionales, leibnizianas (mundos posibles), efectivas (sistema recursivo)) (Béziau 2002, pág. 476).
4. Maximalidad: *"... in sense that any strengthening of it (negation) leads to classical negation or trivialize it (negation) ..."* (Béziau 2000, pág. 101).

Posibles propiedades clásicas[a] **de una negación** (Béziau 2002, pág. 475-6).

A. Reducción al absurdo

   (1) Si $\neg A \Vdash B$ y $\neg A \Vdash \neg B$ entonces $\Vdash A$.

   (2) Si $A \Vdash B$ y $A \Vdash \neg B$ entonces $\Vdash \neg A$.

   (3) Si $\neg A \Vdash A$ entonces $\Vdash A$.

   (4) Si $A \Vdash \neg A$ entonces $\Vdash \neg A$.

B. De Morgan (conjunción, disyunción, implicación) (12 leyes).

C. Doble negación: $\neg\neg A \Vdash A$ y $A \Vdash \neg\neg A$.

D. Ley de no contradicción (LNC): $\Vdash \neg(A \wedge \neg A)$.

---

[a] Negaciones paraconsistentes duras (Béziau 2002, pág. 104) (ej. $A \Vdash \neg A$).

Posibles propiedades clásicas de una negación (continuación):

E. Contraposición

(5) Si $\neg A \Vdash \neg B$ entonces $B \Vdash A$.

(6) Si $A \Vdash B$ entonces $\neg B \Vdash \neg A$.

(7) Si $A \Vdash \neg B$ entonces $B \Vdash \neg A$.

(8) Si $\neg A \Vdash B$ entonces $\neg B \Vdash A$.

F. Ley del tercio excluído: $\Vdash A \vee \neg A$.

Compatibilidades con el rechazo de PPS:

1. Reducción al absurdo: (3) y (4) (Béziau 2002, pág. 477).

2. LNC (lógicas paraconsistentes completas, idea fundacional de da Costa) (Béziau 2002, pág. 477).

Incompatibilidades con el rechazo de PPS:

1. Reducción al absurdo: (1) y (2) (Béziau 2002, pág. 477).
2. De Morgan + Doble negación + Auto-extensionalidad (lógicas paraconsistentes morganianas) (Béziau 2002, pág. 480).
3. Doble negación + Auto-extensionalidad + adjuntiva[a] (Béziau 2000, pág. 102), (Béziau 2002, pág. 476).
4. (1) + Monotonía (Béziau 2000, pág. 103).
5. (5) + Monotonía (?) (Béziau 2000, pág. 103).
6. (7) + Monotonía (?) (Béziau 2000, pág. 103).

---

[a] $A, B \Vdash A \wedge B$ (Béziau 2002, pág. 476).

Capítulo 4

Lógicas paraconsistentes

Motivación[a]

1. Teorías "ingenuas" de conjuntos $\begin{cases} \exists y \forall x \ (x \in y \leftrightarrow F(x)), \\ \forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y, \end{cases}$ y en general en algunas teorías matemáticas.
2. Manipulación de algunos sistemas de información.
3. Motivaciones internas de la lógica.
4. Teorías científicas: *"Indeed it could be persuasively argued that the whole state of scientific knowledge at any time is such theory (inconsistente pero no trivial)"* (Priest y Routley 1989c, pág. 152).
5. Teoría de Meinong (teoría de objetos contradictorios) (1907).
6. Dialéctica y algunos sistemas legales.

[a] (Priest y Routley 1989c, págs. 151-155), (da Costa y Lewin 2005, págs. 185-187).

7. ***"Or maybe paraconsistent logic will save us from the tricephalous CGC-monster (CGC for Cantor-Gödel-Church) by providing foundations for finite decidable complete mathematics"*** (Béziau 1999, pág. 16).

   Teorema de Gödel (1931) (TG): *"Any ω-consistent*[a] *theory which is strong enough to represent all (primitivas) recursive function is incomplete"* (Priest y Routley 1989d, pág. 523) (ideas más elaboradas).

   $TG \not\Rightarrow$ que cualquier teoría axiómatica de la aritmética (matemática) sea incompleta.

   Por lo tanto, sería posible construir **extensiones inconsistentes** de la aritmética de Peano (consistente?) **completas**.

[a] Una teoría (aritmética) Γ es ω-consistente si no existe ninguna formula $F(x)$, tal que $\Gamma \vdash F(0), \Gamma \vdash F(1), \ldots, \Gamma \vdash F(n), \ldots, \Gamma \vdash \neg\forall x\ F(x)$. Además, ω-consistente $\Rightarrow$ consistencia, pero consistencia $\not\Rightarrow$ ω-consistencia (Gödel 1989, pág. 49). En 1936, Rosser redujo la condición de ω-consistencia a consistencia, pero utilizó el silogismo disyuntivo (Priest y Routley 1989d, nota 115).

Historia[a]

Gestación (1910-1963): *"If ... the relativy of the contradiction principle had been cleary acknowledged, a truly paraconsistent logic was not constructed"* (da Costa, Béziau y Bueno 1995, pág. 112).

- Jan Lukasiewicz (1910). Principio de no contradicción de Aristóteles.
- Vasil'év (1910). Lógica imaginaria no aristótelica (geometrías no euclideanas).
- Jaśkowski (1948). Lógica discursiva.

[a](da Costa, Béziau y Bueno 1995). Además (Priest y Routley 1989b,a) presentan una historia desde una perspectiva filosófica.

Nacimiento e infancia (1963-1976): *"... a system of logic ... has to be developed at least to emcompass quantification and equality ..."* (da Costa, Béziau y Bueno 1995, pág. 114).

- Newton C.A. da Costa (1963).
  Lógicas proposicionales C_n, lógicas de predicados de primer orden C_n^* y lógicas de predicados de primer orden con identidad $C_n^=$, $(1 \leq n \leq \omega)$.

  Marcel Guillaume presentó los sistemas en *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*.

  Estudios acerca de la decidibilidad, la semántica y la álgebrización para los sistemas de da Costa.

  Teorías paraconsistentes de conjuntos NF_i, $(1 \leq i \leq \omega)$.

Bautismo y adolescencia (1976-1991): *"I believe that few times in the history of science (definitely in the history of logic) something similar has happened, for not only the word run the whole word, but the very logic called ... 'paraconsistent' received a formidable push"* (da Costa, Béziau y Bueno 1995, pág. 118).

- Miró Quesada (1976): Bautizo: "Lógicas paraconsistentes"[a] (antes "sistemas formales inconsistentes") en el III Congreso Latinoamericano de Lógica Matemática, Campinas, Brazil.
- Complementaria a la lógica clásica (no rival). Línea dura: Lógicas dialécticas (escuela australiana, Priest, Routley).
- Aplicaciones a ciencias de la computación.
- Decidibilidad (Fidel, 1970), semántica de valuaciones (da Costa y Alves, 1977) y no posible algebrización (Mortensen, 1980) para C_1.

[a] Posibles nombres: metaconsistente, ultraconsistente (da Costa, Béziau y Bueno 1995, pág. 118), neoconsistent, transconsistent, anticonsistent, parainconsistent, anti-inconsistent, transinconsistent, neoinconsistant (Béziau 1999, pág. 4).

La edad de la razón (1991): *"... it means that paraconsistent logic is a research domain whose importance is acknowledged by the mathematicians, despite ideological divergences"* (da Costa, Béziau y Bueno 1995, pág. 118).

- *Mathematical Reviews:* $03B53$. **Problema abierto: su definición.**

Algunos congresos (Marcos 2002, pág. 3):

- 1997: *I World Congress on Paraconsistency, Ghent, Belgium* (`logica.rug.ac.be/centrum/events/WCP97/index.html`).
- 1998: *Stanislaw Jáskowski Memorial Symposium, Torún, Poland* (`www.uni.torun.pl/~logic/JS'98/`).
- 2000: *II World Congress on Paraconsistency, Juquehy, Brazil* (`logica.cle.unicamp.br/wcp/wcp2000.htm`).
- 1997 y 2001: *International Workshops on Living With Inconsistency, USA and Canada* (`http://www.cs.toronto.edu/~sme/IWLWI-01/`).
- 1999-2001: *Flemish-Polish Workshops on the Ontological Foundations of Paraconsistency* (`logica.rug.ac.be/centrum/events/Vlapol2/2deworkshop.htm`), (`logica.rug.ac.be/centrum/events/Vlapol4/4deworkshop.html`).

Definición[a]

Convenciones para la metalógica: La metalógica es clásica y usa el siguiente conjunto de conectivos $\{\backsimeq, \curlywedge, \curlyvee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Principios (respecto a una lógica $\boldsymbol{L} = < For, \Vdash >$):

- Principio de no contradicción:
  $\exists\Gamma\,\forall A\ \backsimeq (\Gamma \Vdash A \curlywedge \Gamma \Vdash \neg A)$ $\quad(\boldsymbol{PNC})$
- Principio de no trivialidad: $\exists\Gamma\,\exists B\,(\Gamma \nVdash B)$ $\quad(\boldsymbol{PNT})$
- Principio de explosión o principio de Pseudo-Scotus o *ex contradictione sequitur quod libet*: $\forall\Gamma\,\forall A\,\forall B\,(\Gamma, A, \neg A \Vdash B)$ $\quad(\boldsymbol{PPS})$

Características de una lógica $\boldsymbol{L}$ $\begin{cases} \text{No contradictoria si satisface } (PNC) \\ \text{No trivial si satisface } (PNT) \\ \text{Explosiva si satisface } (PPS) \end{cases}$

[a](Carnielli y Marcos 2002, secs. 2.1 y 2.2).

Definición 1 (Lógica paraconsistente (1))**.**
$\boldsymbol{L}$ es una lógica paraconsistente si satisface:

$$\exists \Gamma\ \exists A\ \exists B\ (\Gamma \Vdash A \curlywedge \Gamma \Vdash \neg A \curlywedge \Gamma \nVdash B) \quad \textbf{(}\boldsymbol{PL}\textbf{1)}$$

Teorema 1. $(PL1) \not\Rightarrow\simeq (PNC)$ *(malentendido común).*

Definición 2 (Lógica paraconsistente (2))**.**
$\boldsymbol{L}$ es una lógica paraconsistente si no es explosiva:

$$\simeq \forall \Gamma\ \forall A\ \forall B\ (\Gamma, A, \neg A \Vdash B) \Leftrightarrow \exists \Gamma\ \exists A\ \exists B\ (\Gamma, A, \neg A \nVdash B) \quad \textbf{(}\boldsymbol{PL}\textbf{2)}$$

Teorema 2. $((CON2) \curlywedge (CON3) \curlywedge (PL1)) \Rightarrow (PL2)$*.*

Teorema 3. $((CON3) \curlywedge (PL1)) \Rightarrow (PL2)$ *(ejercicio).*

Teorema 4. $((CON1) \curlywedge (PL2)) \Rightarrow (PL1)$*.*

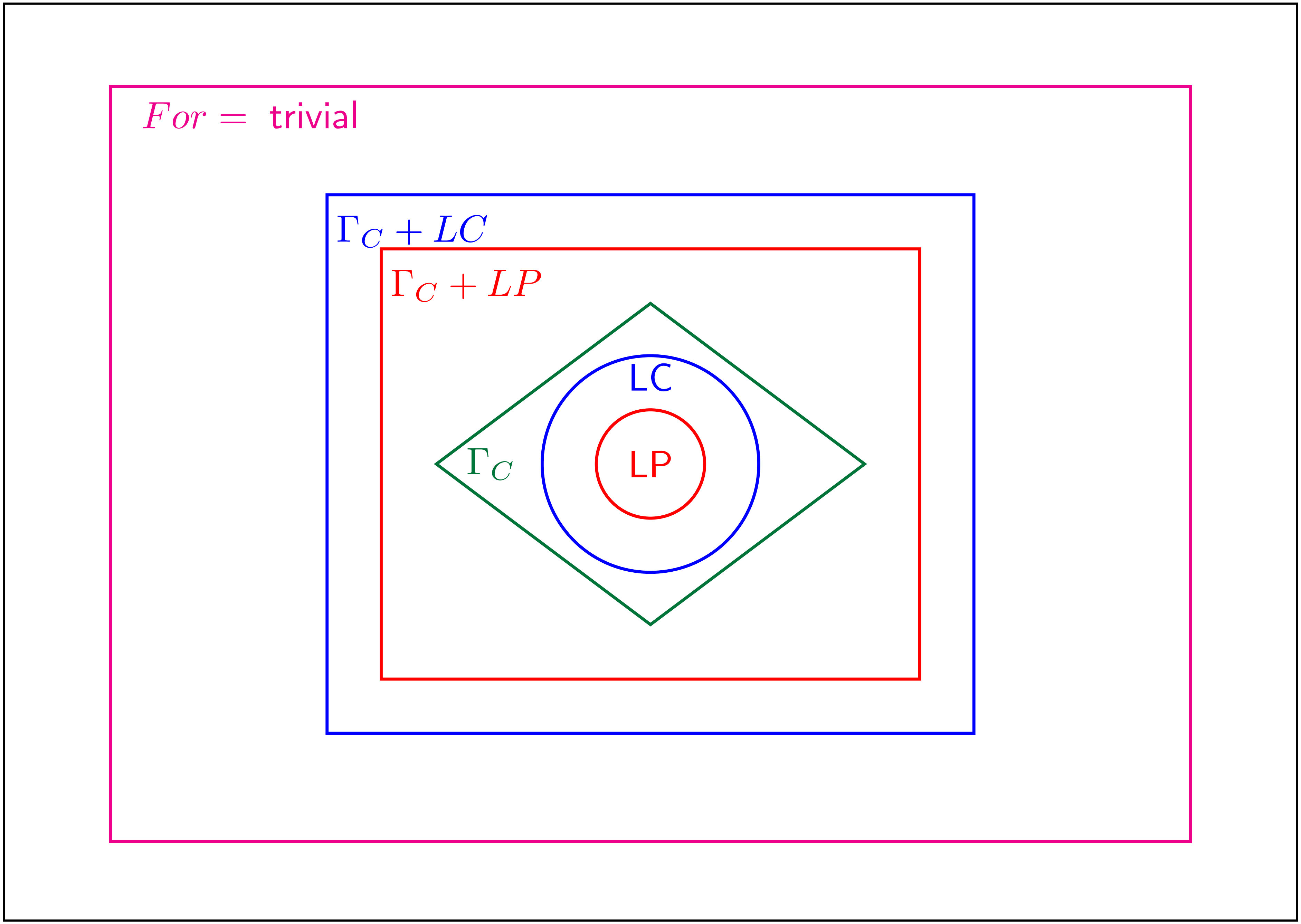
Teorema 5. $((CON1) \curlywedge (CON3)) \Rightarrow ((PL1) \Leftrightarrow (PL2))$*.*

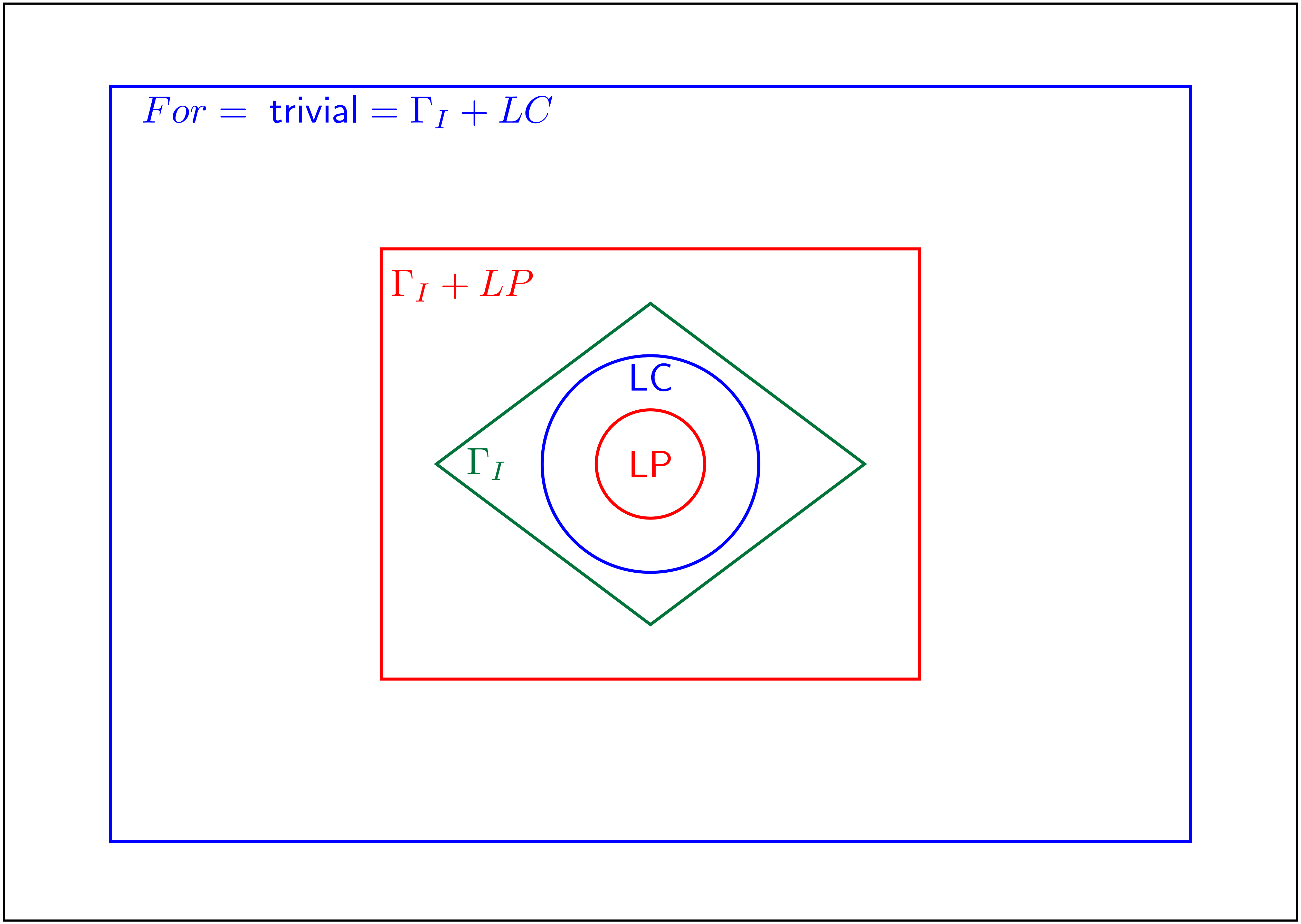
Definición 3 (Equivalencia)**.** Dos fórmulas A y B son equivalentes, denotado por $A \dashv\Vdash B$, si $A \Vdash B$ y $B \Vdash A$.

Dos teorías Γ y Δ son equivalentes, denotado por $\Gamma \dashv\Vdash \Delta$, si $\forall A \in \Delta\ (\Gamma \Vdash A)$ y $\forall B \in \Gamma\ (\Delta \Vdash B)$.

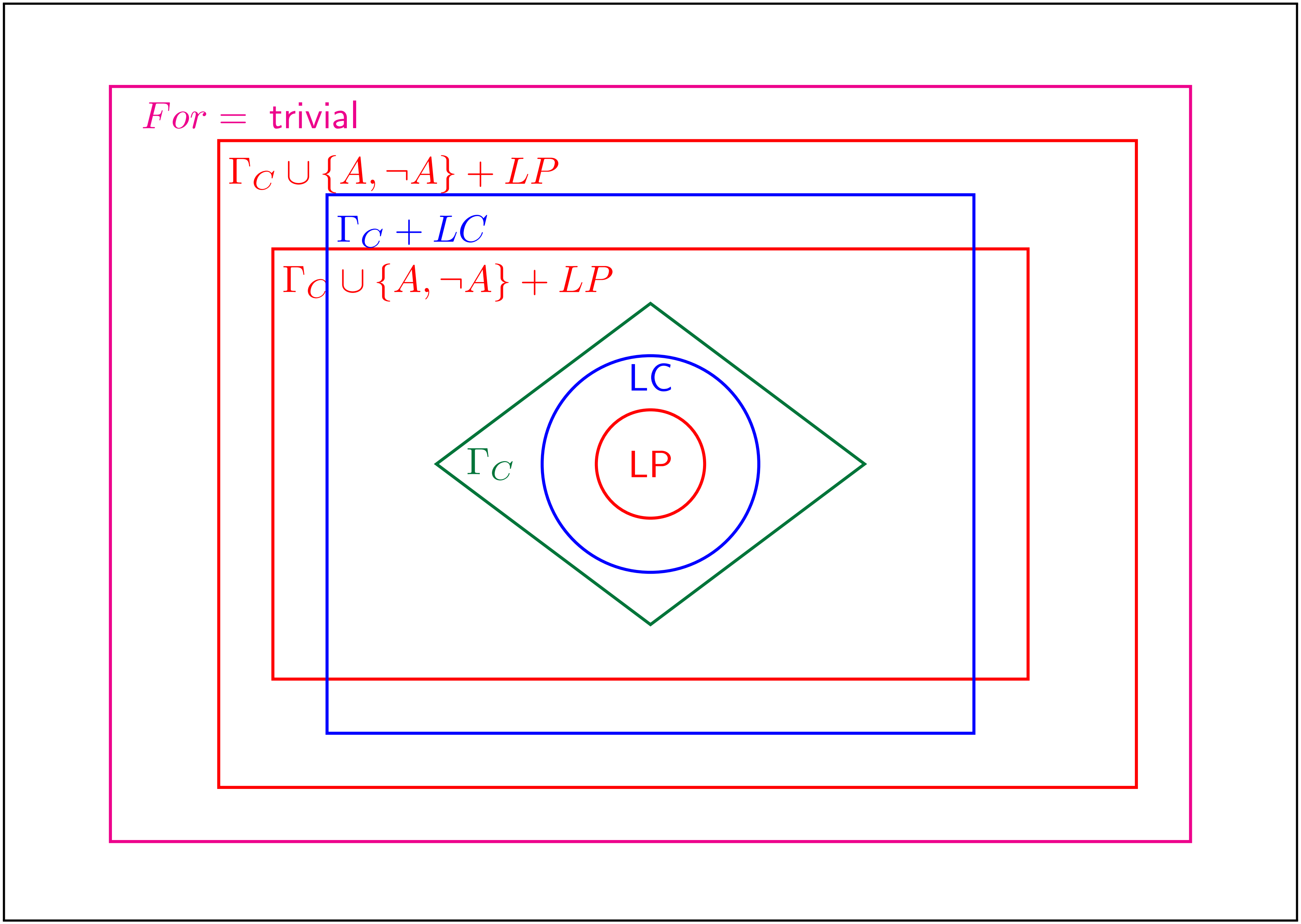
Teorema 6. *Si* $\boldsymbol{L}$ *es una lógica paraconsistente y transitiva, entonces no todas sus contradicciones son equivalentes.*

Convención: *"...the great majority of the paraconsistent logics found in the literature, and all the paraconsistent logics studied in this paper, are non-contradictory. In particular, they usually have non-contradictory empty theories, which means, ...that they bring no built-in contradiction in their axioms, and that their inference rules do not generate contradictions from these axioms. Even so, because of their paraconsistent character, they can still be used as underlying logics to extract some sensible reasoning of some theories that are contradictory and are still to be kept non-trivial. ...So, all paraconsistent logics which we will present here are in some sense more conservative than classical logic, in the sense that they will extract less consequences than classical logic would extract from some given classical theory, or at most the same set of consequences, but never more. Our paraconsistent logics then (as most paraconsistent logics in the literature) will not validate any bizarre form of reasoning, and will not extract any contradictory consequence in the cases where classically there were no such consequences. It is nonetheless possible to also build logics which disrespect both (PPS) and (PNC), and thus might be said to be highly non-classical, in a certain sense, once they do have theses which are not classical theses. ...We will not study these kind of logics here."* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 21).


$For =$ trivial
$\Gamma_C + LC$
$\Gamma_C + LP$
LC
Γ_C
LP



$For =$ trivial $= \Gamma_I + LC$
$\Gamma_I + LP$
LC
Γ_I
LP



$For =$ trivial
$\Gamma_C \cup \{A, \neg A\} + LP$
$\Gamma_C + LC$
$\Gamma_C \cup \{A, \neg A\} + LP$
LC
Γ_C
LP

El dilema de la trivialización[a]

- Si $\boldsymbol{L}$ satisface $(PL1)$ y $(PL2)$, entonces existe Γ tal que:
  - Γ es contradictoria
  - Γ es no trivial
  - Γ **es no explosiva**
- Existen teorías Γ sobre $\boldsymbol{L}$ (ej. $\Gamma = For$) tales que:
  - Γ es trivial
  - Γ es contradictoria
  - Γ **es explosiva**
- Existen grados intermedios para una teoría Γ entre ser explosiva y no serlo.

[a] (Carnielli y Marcos 2002, sec. 2.3).

Algunas propiedades de una lógica:

(D7) $\boldsymbol{L}$ es **finitamente trivializable** si tiene teorías finitas triviales.

(D8) $\boldsymbol{L}$ tiene una **fórmula inferior** (fórmula falsa) si $\exists C\, \forall \Gamma\, \forall B\, (\Gamma, C \Vdash B)$.
Si existe, la fórmula C será denotada por $\perp$ (bot).

(D9) $\boldsymbol{L}$ tiene una **fórmula superior** (fórmula verdadera) si $\exists \top\, \forall \Gamma\, (\Gamma \Vdash \top)$.
Si existe, la fórmula C será denotada por $\top$ (top).

Teorema 7. *Sea $\boldsymbol{L}$ una lógica que satisfaga $(CON3)$ y además $\Vdash \perp$, entonces $\boldsymbol{L}$ es trivial* ***(ejercicio)****.*

Teorema 8. *Sea $\boldsymbol{L}$ una lógica que satisfaga $(CON2)$ y $\Vdash A$, entonces A es $\top$ para $\boldsymbol{L}$.* ***(ejercicio)****.*

Teorema 9. *Sea $\boldsymbol{L}$ una lógica que satisfaga $(CON2)$, $(CON3)$ y tenga $\top$, entonces $(\Gamma \Vdash B \Leftrightarrow \Gamma, \top \Vdash B)$* ***(ejercicio)****.*

Definición 4. Sea $\sigma\colon For \to For$, una función donde $\sigma(A)$ es una fórmula de A. La extensión $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ es una fórmula de $A_1, \ldots, A_n$. Además $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ puede ser considerado un esquema.

Algunas propiedades de una lógica:

(D10) $\boldsymbol{L}$ tiene una **negación fuerte** $(\sim)$ si:

(a) $\exists A$ tal que el esquema $\sigma(A) \neq \perp$ y

(b) $\forall A\, \forall \Gamma\, \forall B\, (\Gamma, A, \sigma(A) \Vdash B)$.

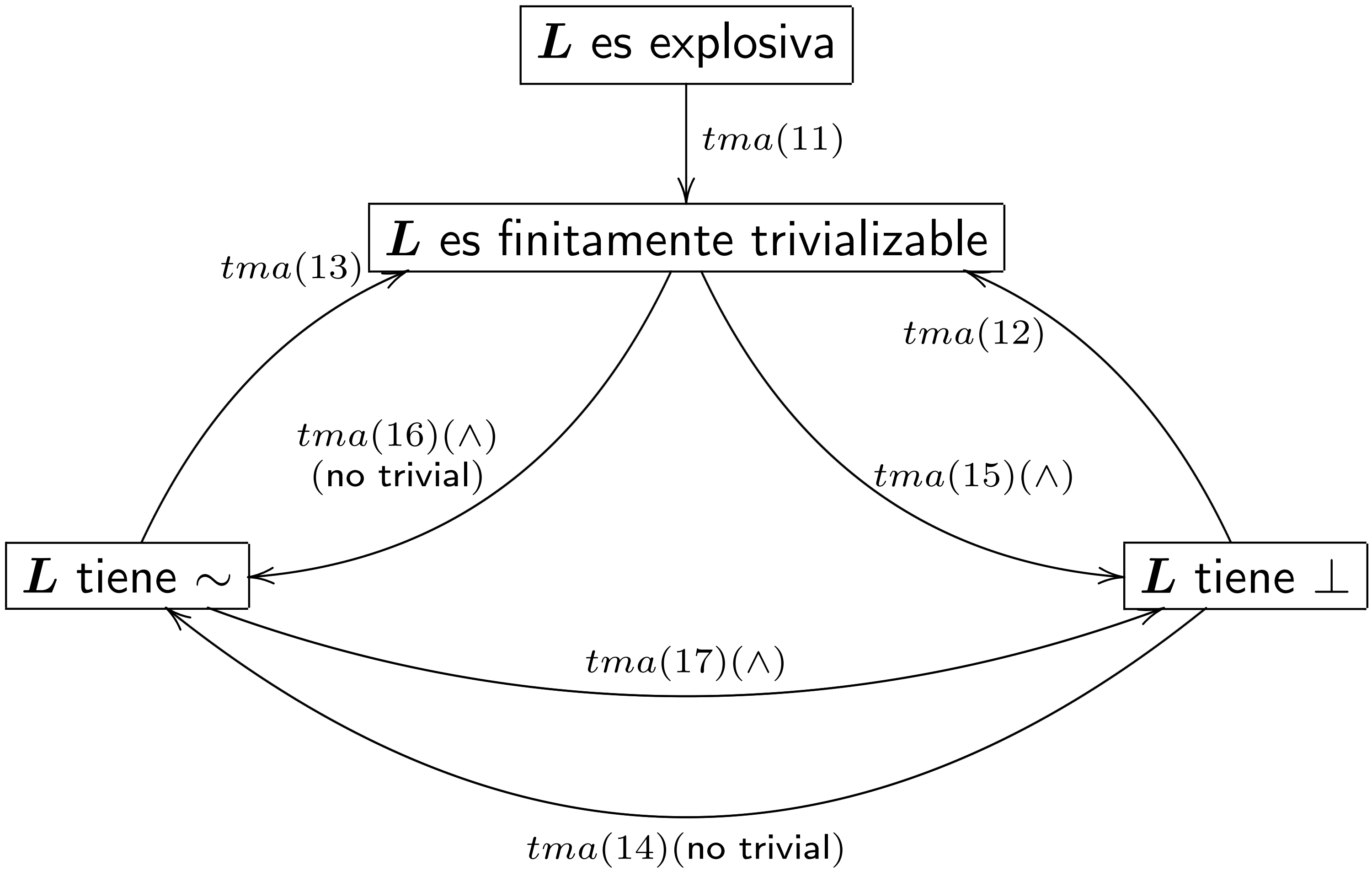
(D13) $\boldsymbol{L}$ tiene una ***left-adjuntive*** $(A \wedge B)$ si:

(a) $\exists A\, \exists B$ tal que el esquema $\sigma(A, B) \neq \perp$ y

(b) $\forall A\, \forall B\, \forall \Gamma\, \forall D\, (\Gamma, A, B \Vdash D \Rightarrow \Gamma, \sigma(A, B) \Vdash D)$

Teorema 10. $((CON1) \curlywedge (CON3)) \Rightarrow ((D13) \Leftrightarrow (pC1))$ ***(ejercicio)***.

Algunas relaciones entre explosividad y las propiedades presentadas:



Teorema 11. *Una lógica explosiva* (*D*6) *es finitamente trivializable* (*D*7) *(FACT 2.9).*

Teorema 12. *Si* $\boldsymbol{L}$ *tiene* $\perp$, *entonces* $\boldsymbol{L}$ *es finitamente trivializable (FACT 2.10 (i)).*

Teorema 13. *Si* $\boldsymbol{L}$ *tiene* $\sim$, *entonces* $\boldsymbol{L}$ *es finitamente trivializable (FACT 2.10 (i)).*

Teorema 14. *Si* $\boldsymbol{L}$ *es no trivial y tiene* $\perp$, *entonces* $\boldsymbol{L}$ *admite* $\sim$ *(FACT 2.10 (ii)).*

Teorema 15. *Si* $\boldsymbol{L}$ *es* left-adjuntive *y finitamente trivializable, entonces* $\boldsymbol{L}$ *tiene* $\perp$ *(FACT 2.13 (i)).*

Teorema 16. *Si* $\boldsymbol{L}$ *es* left-adjuntive, *no trivial y finitamente trivializable, entonces* $\boldsymbol{L}$ *tiene* $\sim$.

Teorema 17. *Si* $\boldsymbol{L}$ *es* left-adjuntive *y tiene* $\sim$, *entonces* $\boldsymbol{L}$ *tiene* $\perp$ *(FACT 2.13 (i)).*

Debilitamientos para (PPS)

- Principio de *ex falso sequitur quod libet*: $\boldsymbol{L}$ tiene $\perp$ $\quad(\boldsymbol{ExF})$.
- Principio de explosión complementado (*supplementing Principle of Pseudo-Scotos*): $\boldsymbol{L}$ tiene $\sim$ $\quad(\boldsymbol{sPPS})$.

Teorema 18. $(PPS) \not\Leftrightarrow (ExF)$ *(Nota 6, pág 22).*

Teorema 19. $((D13) \curlywedge (PPS)) \Rightarrow (ExF)$ *(FACT 2.13 (iii)) (tma. 15).*

Teorema 20. $((PPS) \curlywedge (PNT) \curlywedge (D13)) \Rightarrow (sPPS)$ *(FACT 2.10 (iii)) (tma. 16).*

Teorema 21. $((ExF) \curlywedge (PNT)) \Rightarrow (sPPS)$ *(FACT 2.10 (iii)) (tma. 14).*

Teorema 22. $((sPPs) \curlywedge (D13)) \Rightarrow (ExF)$ *(tma. 17).*

Algunas relaciones entre paraconsistencia y los principios presentados:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge]
\boxed{\boldsymbol{L} \text{ es paraconsistente y tiene } \perp} \arrow[d, bend left, "tma(23)"] \\
\boxed{\boldsymbol{L} \text{ es paraconsistente y admite } \sim} \arrow[u, bend left, "tma(26)(\wedge)"] \arrow[d, bend left, "tma(24)"] \\
\boxed{\boldsymbol{L} \text{ es paraconsistente y finitamente trivializable}} \arrow[u, bend left, "tma(27)(\wedge)"] \arrow[uu, bend left=60, "tma(25)(\wedge)"]
\end{tikzcd}
$$

Teorema 23. $((PL1) \curlywedge (ExF)) \Rightarrow ((PL1) \curlywedge (sPPS))$.

Teorema 24. $((PL1) \curlywedge (sPPS)) \Rightarrow ((PL1) \curlywedge (D7))$.

Teorema 25. $((D13) \curlywedge (PL1) \curlywedge (D7)) \Rightarrow ((PL1) \curlywedge (ExF))$.

Teorema 26. $((D13) \curlywedge (PL1) \curlywedge (sPPS)) \Rightarrow ((PL1) \curlywedge (ExF))$.

Teorema 27. $((D13) \curlywedge (PL1) \curlywedge (D7)) \Rightarrow ((PL1) \curlywedge (sPPS))$.

LFI *(Logic of formal inconsistency)*[a]

Motivación (Carnielli y Marcos 2002, pág. 27): *"Why are you so interested in having these special explosive theories?" (ExF* $(\perp)$*, sPPS* $(\sim)$*, finitamente trivializable)*

- *"Because our interest lies much further than the simple control of the explosive power of contradictions"*.
- *"...we want to be able to take hold of the very notion of consistency inside of our logics!"*.
- *" ...the paraconsistent logics which shall interest us are exactly those which permit us to formalize, and get a good grip on, the intricate phenomenon of inconsistency, as opposed to mere cut and dried contradictoriness"*.

[a] (Carnielli y Marcos 2002, sec. 2.4).

Consistencia: *"So one may **conjecture** that consistency is exactly what a contradiction might be lacking to become explosive —if it was not explosive from the start"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 27).

(D15) Sea $\Delta(A) = \{\sigma_i(A)\}_{i \in I}$ un conjunto de esquemas dependiendo de A. Una teoría Γ es **suavemente explosiva** (*gently explosive*) si:

(a) $\exists A\, \exists B\, ((\Delta(A), A \nVdash B) \curlywedge (\Delta(A), \neg A \nVdash B))$ y

(b) $\forall A\, \forall B\, (\Gamma, \Delta(A), A, \neg A \Vdash B)$.

(D18) Una lógica $\boldsymbol{L}$ es **suavemente explosiva** cuando todas sus teorías son suavemente explosivas.

(D17) Una teoría $\boldsymbol{L}$ es **finitamente suavemente explosiva** cuando todas sus teorías son finitamente suavemente explosivas ($\Delta(A)$ es finito).

Conclusión: *"... what we are implicitly assuming ... is that, for any given formula A, the (finite) set $\Delta(A)$ will express, in a certain sense, **the consistency of A relative to the logic $\boldsymbol{L}$**"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 28).

Nuevos debilitamientos para (PPS):

- Principio de explosión suave (*gentle principle of explosion*): $\boldsymbol{L}$ es suavemente explosiva $\quad (\boldsymbol{gPPS})$.
- Principio de explosión suave finita (*finite gentle principle of explosion*): $\boldsymbol{L}$ es finitamente suavemente explosiva $\quad (\boldsymbol{fgPPS})$.

(D19) Una lógica $\boldsymbol{L}$ es **consistente** si ($\boldsymbol{L}$ es inconsistente si no es consistente):

(a) $\boldsymbol{L}$ satisface $gPPS$ y

(b) $\forall A\ (\Delta(A) = \emptyset \curlyvee (\forall \Gamma\ \forall B \in \Delta(A))\ (\Gamma \Vdash B))$.

Teorema 28. $((PNT) \curlywedge (PPS)) \Rightarrow (fgPPS)$ *(FACT 2.14 (i))*.

Teorema 29. $(CON3) \Rightarrow ((D19) \Leftrightarrow ((PPS) \curlywedge (PNT)))$ *(FACT 2.14 (ii))*.

Teorema 30. $((CON3) \curlywedge (D19)) \Rightarrow (fgPPS)$ *(FACT 2.14 (iii))*.

- Principio de consistencia: $\boldsymbol{L}$ es $(CON3)$ y satisface (PPS) y (PNT).

"We may now finally define what we will mean by a logic of formal inconsistency ***(LFI)****, which will be nothing more than a logic that allows us to 'talk about consistency' in a meaningful way"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 28(9)).

" . . . an ***LFI*** *will be any non-trivial logic in which consistency does not hold,* ***but can still be expressed****, thus being a gently explosive and yet non-explosive logic, that is, a logic in which"* (Carnielli y Marcos 2002, pág. 29):

(D20) $\boldsymbol{L}$ es una lógica **LFI** si:

(a) No satisface (PPS) y

(b) Satisface $(gPPS)$

Ejemplo 3. Lógica PAC:

	$\neg$
$\mathbf{1}$	0
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{0}$	1

$\wedge$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{0}$	0	0	0

$\vee$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	1	1	1
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{0}$	1	$\frac{1}{2}$	0

$\to$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{0}$	1	1	1

Ejemplo 4. Lógica J_3:

	$\sim$	$\Diamond$	$\circ$
$\mathbf{1}$	0	1	1
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	1	0
$\mathbf{0}$	1	0	1

Ejemplo 5. Lógica discursiva de Jaśkowski $D2$:
$\Gamma \models_{D2} A$ sii $\Diamond\Gamma \models_{S5} \Diamond A$, donde $\Diamond\Gamma = \{\Diamond B \mid B \in \Gamma\}$ (Carnielli y Marcos 2002, pág. 25).

	PPS	PNT	FT	ExF	$sPPS$	$fgPPS$
LC	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PAC	X	✓	X	X	X	X
J_3	X	✓	✓	✓	✓	✓
D_2	X	✓	✓	✓	✓	✓

Conclusiones:

1 La lógica LC es una lógica consistente.

2 La lógica PAC es una lógica paraconsistente, pero no es una lógica LFI.

3 La lógica J_3 es una LFI, en donde la consistencia de una fórmula está representada por $\circ A$, es decir, $\forall\Gamma\,\forall A\,\forall B\,(\Gamma, \circ A, A, \neg A \models_{J_3} B)$.

4 La lógica $D2$ es una LFI, en donde la consistencia de una fórmula está representada por $(\Box A \vee \Box\neg A)$, es decir, $\forall\Gamma\ \forall A\ \forall B\ (\Gamma, \Box A \vee \Box\neg A, A, \neg A \models_{D2} B)$.

C-*Systems*[a]

Sea $\boldsymbol{L} = \{For, \Vdash\}$ una lógica y sea $For^+ \subseteq For$ el subconjunto de fórmulas positivas (sin negación) de For.

(D27) La lógica $\boldsymbol{L_1} = \{For_1, \Vdash_1\}$ es **positivamente preservativa relativa** a la lógica $\boldsymbol{L_2} = \{For_2, \Vdash_2\}$ si:

(a) $For_1^+ = For_2^+$ y

(b) $(\Gamma \Vdash_1 A \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_2 A)$, para todo $\Gamma \cup \{A\} \subseteq For_1^+$.

Teorema 31. *Cualquier lógica $PL1$ y $ExF(\bot)$ que es positivamente preservativa relativa a la lógica clásica, es una lógica LFI (FACT 2.19).*

---

[a](Carnielli y Marcos 2002, sec. 2.6).

(D28) La lógica $\boldsymbol{L_1}$ es un C-***system*** basada en la lógica $\boldsymbol{L_2}$ si:

(a) $\boldsymbol{L_1}$ es LFI en la cual consistencia e inconsistencia son expresados por operadores en el lenguaje objeto.

(b) $\boldsymbol{L_2}$ no es paraconsistente.

(c) $\boldsymbol{L_1}$ es positivamente preservativa relativa $\boldsymbol{L_2}$.

" All C-systems we will be studying below are inconsistent, non-contradictory and non-trivial. Furthermore, . . . they have strong negations and bottom particles, and are positively preserving relative to classical propositional logic so, that they will respect (PNC), (PNT), (ExF), $(sPPS)$, $(gPPS)$ . . . but they will not respect neither (PPS) . . . " (Carnielli y Marcos 2002, pág. 32)

Debilitamientos adicionales para (PPS)[a]

"The distinction between the original formulation of explosiveness, its formulation in terms of ex falso, and its supplementing and gentle formulations offered above does not tell you everything you need to know about the ways of exploding. Indeed, there are more things in the realm of explosiveness, dear reader, than are dreamt of in your philosophy!" (Carnielli y Marcos 2002, pág. 29).

(D21) Una teoría Γ es **parcialmente trivial** respecto al esquema $\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ (σ-parcialmente trivial) si:

(a) $\exists C_1, \ldots, \exists C_n$ tales que $\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ no es $\top$ y

(b) $\forall C_1, \ldots, \forall C_n$ $(\Gamma \Vdash \sigma(C_1, \ldots, C_n))$.

[a] (Carnielli y Marcos 2002, sec. 2.5).

(D22) Una teoría Γ es **parcialmente explosiva** respecto al esquema $\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ (σ-parcialmente explosiva) si:

(a) $\exists C_1, \ldots, \exists C_n$ tales que $\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ no es $\top$ y

(b) $\forall C_1, \ldots, \forall C_n \, \forall A \, (\Gamma, A, \neg A \Vdash \sigma(C_1, \ldots, C_n))$.

(D23) Una lógica $\boldsymbol{L}$ es σ-**parcialmente trivial**, si todas sus teorías lo son.

(D24) Una lógica $\boldsymbol{L}$ es σ-**parcialmente explosiva**, si todas sus teorías lo son.

(D25) Una teoría Γ es **controlablemente explosiva** en contacto con el esquema $\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ si:

(a) $\exists C_1, \ldots, \exists C_n$ tales que $\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ no es $\perp$ y $\neg\sigma(C_1, \ldots, C_n)$ no es $\perp$ y

(b) $\forall C_1, \ldots, \forall C_n \, \forall B \, (\Gamma, \sigma(C_1, \ldots, C_n), \neg\sigma(C_1, \ldots, C_n) \Vdash B)$.

(D26) Una lógica $\boldsymbol{L}$ es **controlablemente explosiva**, si todas sus teorías lo son.

Debilitamientos adicionales para (PPS):

- Principio de explosión parcial (*principle of partial explosion*): $\boldsymbol{L}$ es parcialmente explosiva $\quad (\boldsymbol{pPPS})$.

- Principio de explosión controlada (*controllable principle of explosion*): $\boldsymbol{L}$ es controlablemente explosiva $\quad (\boldsymbol{cPPS})$.

* Una lógica $\boldsymbol{L}$ es **fuertemente paraconsistente** (*boldly paraconsistent*) si $\boldsymbol{L}$ no satisface $(pPPS)$ $\quad (\boldsymbol{BPL})$.

Algunos teoremas:

Teorema 32. $(D23) \Rightarrow (D24)$ ***(ejercicio)*** *(FACT 2.15 (i))*.

Teorema 33. $(PPS) \Rightarrow (pPPS)$ ***(ejercicio)*** *(FACT 2.15 (ii))*.

Teorema 34. $(BPL) \Rightarrow (PL2)$ ***(ejercicio)*** *(FACT 2.16).*

Teorema 35. $((PNT) \curlywedge (PPS)) \Rightarrow (cPPS)$ ***(ejercicio)*** *(FACT 2.17) (i).*

Teorema 36. $((CON3) \curlywedge (D19)) \Rightarrow (cPPS)$ ***(ejercicio)*** *(FACT 2.17) (ii).*

Teorema 37. $((fgPPS) \curlyvee (cPPS)) \Rightarrow ((D7) \curlywedge (PNT))$ ***(ejercicio)*** *(FACT 2.18).*

¿Nuevos debilitamientos?
"A range of variations on the above versions of the Principle of Explosion can be obtained if we only mix the ones we already have. We shall nevertheless not investigate this theme here any further, but only notice that the multiple relations, hinted above, between $(sPPS)$, $(gPPS)$ and $(cPPS)$, the supplementing, the gentle and the controllable forms of explosion, certainly deserve a closer and more attentive look by the 'paraconsistent community' and sympathizers" (Carnielli y Marcos 2002, pág. 29).

Capítulo 5

Lógica discursiva de Stanislaw Jaśkowski

Referencias: Artículo de Jaśkowski (1969) (Jaśkowski 1969)[a]. Presentación axiómatica y extensión a predicados (da Costa y Dubikajtis 1977)[b]. Comentarios acerca de (Jaśkowski 1969) son presentados en (Bobenrieth 1996, cap. VIII). Presentaciones formales modernas (D'Ottaviano 1990, sec. 2) y (da Costa y Lewin 2005, sec. III(1)).

Motivación:

1. Trabajos anteriores de Lukasiewicz.
2. Diferencia entre sistema contradictorio y sistema trivial.
3. Justificación intuitiva y práctica.

---

[a]El artículo apareció originalmente en polaco en 1948 (cfr. nota * en (Jaśkowski 1969)).

[b]La primera axiomatización fue realizada por da Costa y Dubikajtis en 1969 (da Costa y Lewin 2005, pág. 190).

Diferencia entre sistema contradictorio y sistema trivial:

- *"A deductive system S is called **contradictory**, if its theses include two such which contradict one another, that is that one is the negation of the other"* (Jaśkowski 1969, pág. 145).

- *"A system in which any meaningful formula is a thesis shall be termed **over-complete** (trivial) . . . but the purpose of the analysis presented in this paper **it is necessary to make a distinction** between two different meanings . . . "* (Jaśkowski 1969, pág. 145).

"Así ha mostrado Jaśkowski que una cosa es que dentro de un sistema exista una contradicción, y otra muy diferente es que de ésta se puedan derivar todos los enunciados posibles en dicho sistema" (Bobenrieth 1996, pág. 155).

El problema de Jaśkowski:

"...the problem of the logic of contradictory systems is formulated here in the following terms: the tash is to find a system of sentencial calculus which" (Jaśkowski 1969, pág. 145):

1. *When applied to the contradictory systems would not always entail their over-completeness (trivialización),*
2. *Would be rich enough to enable practical inference,*
3. *Would be an intuitive justification.*

Lógica modal[a]

Símbolos lógicos para los sistemas modales: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Box, \Diamond\}$ (convención (Sierra 2001)). Símbolos metalógicos: $\{\simeq, \curlywedge, \curlyvee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

$$\left.\begin{array}{rl} A1. & (A \vee A) \rightarrow A \\ A2. & B \rightarrow (A \vee B) \\ A3. & (A \vee B) \rightarrow (B \vee A) \\ A4. & (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \\ RT1. & \text{Regla de sustitución uniforme} \\ RT2. & \text{Modus Ponens} \end{array}\right\} \text{Lógica clásica (LC)}$$

[a] Referencias: (Hughes y Cressivell 1973; Sierra 2001).

Equivalencias modales: $\begin{cases} \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A \\ \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A \end{cases}$

Posibles leyes de reducción (Hughes y Cressivell 1973, pág. 49):

R1. $\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A \quad (R1a. \leftarrow, R1b. \rightarrow)$

R2. $\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box A \quad (R2a. \leftarrow, R2b. \rightarrow)$

R3. $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A \quad (R3a. \leftarrow, R3b. \rightarrow)$

R4. $\Box\Box A \leftrightarrow \Box A \quad (R4a. \leftarrow, R5b. \rightarrow)$

El sistema modal T "captura" las leyes de reducción $R4b$, $R1b$, $R2a$ y $R3a$. El sistema modal $S4$ "captura" las leyes de reducción anteriores además de las leyes de reducción $R3b$ y $R4a$. Finalmente el sistema modal $S5$ "captura" todas las leyes de reducción.

$$\left.\begin{array}{rl} & \text{Lógica clásica} \\ A5. & \Box A \to A \text{ (axioma de necesidad)} \\ A6. & \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \\ RT3. & \text{Regla de necesariedad } (\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A) \end{array}\right\} \text{Sistema } T$$

$$\left.\begin{array}{rl} & \text{Sistema } T \\ A7. & \Box A \to \Box\Box A \end{array}\right\} \text{Sistema } S4 \qquad \left.\begin{array}{rl} & \text{Sistema } T \\ A8. & \Diamond A \to \Box\Diamond A \end{array}\right\} \text{Sistema } S5$$

Semántica para los sistemas T, $S4$ y $S5$:

Sea $\mathfrak{M} = \{MU, R, V\}$ un modelo, donde, $MU = \{mu_1, mu_2, \ldots, mu_n\}$ es un **conjunto de mundos posibles**, R es una relación diádica denominada **relación de accesibilidad** y V es una **asignación**.

De acuerdo al método de los **diagramas semánticos** ((Hughes y Cressivell 1973, caps. V y VI), (Sierra 2001, sec. 1.5) las condiciones de la relación de accesibilidad R para cada uno de los sistemas T, $S4$ y $S5$ es la siguiente:

Sistema T: La relación R debe ser **reflexiva** ($\models_T \Box A \to A$ (Sierra 2001, pág. 34)).

Sistema $S4$: La relación R debe ser **reflexiva y transitiva** ($\models_{S4} \Box A \to A$ y $\models_{S4} \Box A \to \Box\Box A$ (Sierra 2001, pág. 36)).

Sistema $S5$: La relación R debe ser **reflexiva, transitiva y simétrica** ($\models_{S5} \Box A \to A$, $\models_{S5} \Box A \to \Box\Box A$ y $\models_{S5} A \to \Box\Diamond A$ (Sierra 2001, pág. 35)).

Sistema de lógica discursiva D_2 de Jaśkowski:

"Let such a system which cannot be said to incluide theses that express opinions in agreement with one another, be termed a ***discursive system****"* (Jaśkowski 1969, pág. 149).

Símbolos lógicos para D_2:
$\{\rightarrow_d, \leftrightarrow_d\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Box, \Diamond\}$(símbolos sistemas modales).

Definiciones ((D'Ottaviano 1990, pág. 107), (da Costa y Lewin 2005, pág. 194) (idea cambiar A por $\Diamond A$):

$$A \rightarrow_d B \stackrel{\text{def}}{=} \Diamond A \rightarrow B$$

$$A \leftrightarrow_d B \stackrel{\text{def}}{=} (\Diamond A \rightarrow B) \wedge (\Diamond B \rightarrow A)$$

Semántica para D_2 (D'Ottaviano 1990, pág. 107): $\models_{D_2} A \Leftrightarrow \models_{S5} \Diamond A$.

Algunos (no) teoremas para D_2:

Teorema 38. $\not\models_{D_2} A \rightarrow_d (\neg A \rightarrow_d B)$ *(forma implicativa del Pseudo-Scotus) (Bobenrieth 1996, pág. 156).*

Teorema 39. $\models_{D_2} \neg(A \wedge \neg A)$ *(principio de no contradicción) (Bobenrieth 1996, pág. 164).*

Teorema 40. $\models_{D_2} (A \wedge \neg A) \rightarrow_d B$ *(forma conjuntiva del Pseudo-Scotus) (Bobenrieth 1996, pág. 164).*

"... el lógico polaco distingue ... entre un aseveración que es en sí —o internamente— contradictoria, la cual sí produciría la ... trivialización del sistema, y el caso en que dos aseveraciones diferentes resulten contradictorias" (Bobenrieth 1996, pág. 165).

Teorema 41. $\not\models_{D_2} A \rightarrow_d (B \rightarrow_d (A \wedge B)$ *(regla de adjunción de la conjunción)* *(Bobenrieth 1996, pág. 165).*

"Por esto se dice que éste es uno de los primeros sistemas ***no adjuntivos*** *o* ***no copulativos*** *...éste es ...el primer sistema que, para evitar el fenómeno de la trivialiación , apela a rechazar este principio ..."* *(Bobenrieth 1996, págs. 164(5)).*

Teoremas adicionales:

Teorema 42. $\not\models_{D_2} A \rightarrow_d (\neg A \rightarrow_d (\neg\neg A \rightarrow_d B)$ *(Bobenrieth 1996, pág. 165).*

Teorema 43. $\models_{D_2} ((A \rightarrow_d B) \wedge (A \rightarrow_d \neg B)) \rightarrow_d \neg A$ *(forma de reducción al absurdo)* *(Bobenrieth 1996, pág. 166).*

Teorema 44. $\not\models_{D_2} (A \rightarrow_d B) \rightarrow_d ((A \rightarrow_d \neg B) \rightarrow_d \neg A)$ *(forma de reducción al absurdo)* *(Bobenrieth 1996, pág. 166).*

Teorema 45. *(i)* $\models_{D_2} (A \leftrightarrow_d \neg A) \rightarrow_d A$. *(ii)* $\models_{D_2} (A \leftrightarrow_d \neg A) \rightarrow_d \neg A$. *(iii)* $\not\models_{D_2} (A \leftrightarrow_d \neg A) \rightarrow_d B$ *(Bobenrieth 1996, pág. 166).*

Semántica para teorías sobre lógicas modales:

Sea $\models_M$ la relación de consecuencia en algún sistema modal M y sea $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una teoría sobre M.

$\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_M B$ significa que para todo modelo $\mathfrak{M}$:
Si $\mathfrak{M} \models_M A_1$ y $\mathfrak{M} \models_M A_2$ y ... y $\mathfrak{M} \models_M A_n$ entonces $\mathfrak{M} \models_M B$.

Por lo tanto, para utilizar el método de los diagramas semánticos para demostrar $\Gamma \models_M B$, es necesario buscar un modelo consistente tal que $\mathfrak{M} \models_M A_1$ y $\mathfrak{M} \models_M A_2$ y ... y $\mathfrak{M} \models_M A_n$ y $\boxed{\mathfrak{M} \not\models_M B}$. Si tal modelo existe entonces $\Gamma \not\models_M B$, de lo contrario, $\Gamma \models_M B$.

Semántica para teorías sobre D_2:
$\Gamma \models_{D_2} A \Leftrightarrow \Diamond\Gamma \models_{S5} \Diamond A$, donde $\Diamond\Gamma = \{\Diamond B \mid B \in \Gamma\}$ (Carnielli y Marcos 2002, pág. 25).

Teorema 46. *D_2 es una lógica LFI, donde la consistencia de una fórmula en D_2 está dada por $(\Box A \vee \Box\neg A)$.*

Teorema 47 (D_2 no satisface PPS)**.** $\forall\Gamma\,\forall A\,\forall B\,(\Gamma, A, \neg A \not\models_{D_2} B)$

Teorema 48 (D_2 satisface $gPPS$)**.**

1. $\exists A\,\exists B\,(\Box A \vee \Box\neg A, A \not\models_{D_2} B) \curlywedge (\Box A \vee \Box\neg A, \neg A \not\models_{D_2} B))$.

2. $\forall\Gamma\,\forall A\,\forall B\,(\Gamma, \Box A \vee \Box\neg A, A, \neg A \models_{D_2} B)$.

Relación de la lógica D_2 con la lógica clásica:

- *"Methodological theorem 1. Every thesis α in the two-value sentencial calculus $L_2(LC)$, which does not include constant symbols other that $C(\to)$, $E(\leftrightarrow)$, $A(\vee)$, becomes a thesis α_d in the discursive sentencial calculus D_2 when in α the implication symbols $C(\to)$ are replaced by $Cd(\to_d)$, and the equivalence symbols $E(\leftrightarrow)$ are replaced by $Ed(\leftrightarrow_d)$"* (Jaśkowski 1969, pág. 151).

- *"Methodological theorem 2. If α is a thesis in the two-value sentencial calculus $L_2(LC)$ and include variables and at the most the functors $A(\vee)$, $K(\wedge)$, $N(\neg)$, then (1) α, (2) $CdN\alpha\beta(\neg\alpha \to_d \beta)$; are theses in D_2"* (Jaśkowski 1969, pág. 152).

Complementos al sistema D_2:

Conjunción discursiva (1949): $A \wedge_d B \overset{\text{def}}{=} A \wedge \Diamond B$.

Teorema 49. $\models_{D_2} \neg(A \wedge_d \neg A)$ *(principio de no contradicción con conjunción discursiva) (Bobenrieth 1996, pág. 168).*

Teorema 50. $\not\models_{D_2} (A \wedge_d \neg A) \rightarrow_d B$ *(forma conjuntiva del Pseudo-Scotus con conjunción discursiva) (Bobenrieth 1996, pág. 166).*

Otros aspectos de D_2 ((D'Ottaviano 1990, sec. 2):

- Presentación axiomática
- Extensión a la lógica de predicados
- Algebraización
- Existencia TD
- Extensión a otros sistemas modales
- Extensión a sistemas multivaluados

Capítulo 6

Lógicas paraconsistentes: escuela brasileña

Newton Carneiro Affonso da Costa

- Principio de tolerancia en matemáticas (1958):

> "Desde el punto de vista sintáctico-semántico, toda teoría es admisible, desde que no sea trivial. En sentido amplio, existe, en matemática, lo que no sea trivial" (Bobenrieth 1996, pág. 180).

- Pluralismo lógico (Bueno 2002).

- Principales objetivos (lógica paraconsistente) (1963-1974) (Marcos 1999, pág. 24):
  - Establecer técnicas lógico-formales que nos permitan una mejor comprensión de las estructuras lógicas subyacentes en las concepciones de los partidarios de la dialéctica.
  - Contribuir al entendimiento propio de las leyes de la lógica clásica.
  - Estudiar los esquemas de separación de la teoría de conjuntos, cuando se debilitan las restricciones a ellos impuestas.
  - Contribuir a la sistematización y el balanceo de teorías nuevas que encierren contradicciones y de las antiguas que, por ese motivo, fueron abandonadas o prácticamente relegadas a un segundo plano.
  - Colaborar en la apreciación correcta de los conceptos de negación y de contradicción.

- Condiciones para los cálculos $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ (1963-1974) (da Costa 1974, pág. 498):
  - En estos cálculos el principio de contradicción, $\neg(A \wedge \neg A)$, no debe ser un esquema válido.
  - De dos fórmulas contradictorias, A y $\neg A$, no debe ser posible, en general, deducir un fórmula arbitraria B.
  - Debe ser simple extender $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, al correspondiente cálculo de predicados de primer orden.
  - $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, debe contener la mayor parte de esquemas y reglas del cálculo proposicional clásico, que no interfieran con las condiciones anteriores.

Sintáxis para el sistema C_1:

A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to B) \to$
$((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

A3. $A \to (B \to (A \wedge B))$

A4. $(A \wedge B) \to A$

A5. $(A \wedge B) \to B$

A6. $A \to (A \vee B)$

A7. $B \to (A \vee B)$

R1. $\dfrac{A, A \to B}{B}$

A8. $(A \to C) \to$
$((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

A9. $B^\circ \to$
$((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

A10. $(A^\circ \wedge B^\circ) \to$
$((A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (A \to B)^\circ)$

A11. $A \vee \neg A$

A12. $\neg\neg A \to A$

$$\underbrace{A^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \neg(A \wedge \neg A)}_{\text{(buen comportamiento)}}$$

Algunas propiedades sintácticas del sistema C_1:

1. Teorema: $\Gamma, A \vdash_{C_1} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C_1} A \to B$ (teorema de deducción).
2. La lógica positiva intuicionista se deduce de los axiomas $A1, \ldots, A8$ (no se obtiene la ley de Pierce $((A \to B) \to A) \to A$).
3. Teorema: $\vdash_{C_1} ((A \to B) \to A) \to A$ (Ley de Pierce (LP)) (Marcos 1999, pág. 45).
4. La lógica positiva clásica se deduce en C_1 (debido a $A1, \ldots, A8, MP, LP$) (Marcos 1999, pág. 45).
5. $A9' : (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (reducción al absurdo), problema: $\{A1, \ldots, A9'\} \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ (viola uno de los prerrequesitos), solución: "reducción al absurdo paraconsistente" (axioma $A9$) (Bobenrieth 1996, pág. 189).
6. Axioma $A10$: Propagación del buen comportamiento para los conectivos veritativo-funcionales.
7. Teorema: $\vdash_{C_1} A^\circ \to (\neg A)^\circ$ (el buen comportamiento se propaga ante la negación de fórmulas bien comportadas) (Marcos 1999, pág. 45).

Algunas propiedades sintácticas del sistema C_1 (cont. (1)):

8. Axiomas $A11$ y $A12$ (Bobenrieth 1996, pág. 189):
   a) Deducir cuanta lógica clásica sea posible
   b) Cierta dualidad con la lógica intuicionista
9. C_1 es no trivial ($\nvdash_{C_1} A \to \neg\neg A$) (Marcos 1999, pág. 44).
10. C_1 es consistente (es un subconjunto de la lógica clásica) (Marcos 1999, pág. 45).
11. C_1 admite una negación fuerte $\sim A \stackrel{\text{def}}{=} \neg A \wedge A^{\circ}$.
12. La negación fuerte $\sim$ tiene todas las propiedades de la negación clásica (sólo es necesario demostrar que $\vdash_{C_1} (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A))$ (D'Ottaviano 1990, pág. 113).
13. C_1 es finitamente trivializable ($\vdash_{C_1} (A \wedge \sim A) \to B$) (Marcos 1999, pág. 45).
14. Teorema: Sea $\neg_{LC}$ la negación en la lógica clásica (LC). Si $\vdash_{LC} A$ entonces $\vdash_{C_1} A[\neg_{LC}/\sim]$ (D'Ottaviano 1990, pág. 114). Consecuencia: $LC \subset C_1$.

Algunas propiedades sintácticas del sistema C_1 (cont. (2)):

15. Teorema: Sea $\Gamma \cup \{A\}$ un conjunto de fórmulas, sea $V = \{A_1, \ldots A_n\}$ el conjunto de variables de $\Gamma \cup \{A\}$ y sea $V^\circ = \{A_1^\circ, \ldots A_n^\circ\}$. $\Gamma \vdash_{LC} A$, si y sólo si, $\Gamma, V^\circ \vdash_{C_1} A$ (Marcos 1999, pág. 46).

16. Teorema: $\vdash_{C_1} A \leftrightarrow B \not\Rightarrow \vdash_{C_1} (\neg A) \leftrightarrow (\neg B)$ (no vale teorema de sustitución por equivalencia) (D'Ottaviano 1990, pág. 115).

    A. Ejemplos $\begin{cases} \vdash_{C_1} (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A) \text{ pero } \nvdash_{C_1} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(B \wedge A) \\ \vdash_{C_1} (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A) \text{ pero } \nvdash_{C_1} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg(B \vee A) \end{cases}$

    B. Posibles soluciones:

        i. Adicionar axioma $\begin{cases} (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B) \text{(Marcos 1999, pág. 46) ó} \\ (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \text{(D'Ottaviano 1990, pág. 11} \\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \leftrightarrow \neg A) \text{(D'Ottaviano 1990, pág. 11} \end{cases}$

        Problema: Colapso a la lógica clásica.

        ii. Definición de una nueva noción de equivalencia compatible con C_1.

Semántica para el sistema C_1:
Teorema: El sistema C_1 no es caracterizable por matrices finitas (Arruda, 1975) (Marcos 1999, pág. 46).

Semántica bivaluada para C_1 (da Costa y Alves 1977)):
Una valuación para C_1 es una función v: $FOR(C_1) \to \{0, 1\}$ tal que (Marcos 1999, pág. 46):

- Por axiomas $A1 - A8$:

  v1. $v(A \wedge B) = 1$, si y sólo si, $v(A) = 1$ y $v(B) = 1$.

  v2. $v(A \vee B) = 1$, si y sólo si, $v(A) = 1$ ó $v(B) = 1$.

  v3. $v(A \to B) = 1$, si y sólo si, $v(A) = 0$ ó $v(B) = 1$.

- Por axioma $A9$:

  v4. Si $v(B^\circ) = v(A \to B) = v(A \to \neg B)$, entonces $v(A) = 0$.

Semántica para el sistema C_1 (cont.) :

- Por axioma $A10$:

  $v5$. Si $v(A^\circ) = v(B^\circ) = 1$, entonces $v((A \to B)^\circ) = v((A \wedge B)^\circ) = v((A \vee B)^\circ) = 1$.

- Por axiomas $A11$ y $A12$:

  $v6$. Si $v(A) = 0$, entonces $v(\neg A) = 1$.

  $v7$. Si $v(\neg\neg A) = 1$, entonces $v(A) = 1$.

Consecuencia: La semántica para C_1 no es veritativo-funcional puesto que de $v(A) = 1$ no se puede concluir que $v(\neg A) = 1$ ni que $v(\neg A) = 0$.

Algunos teoremas (Marcos 1999, pág. 47):

1. $v(A) = 0$, si y sólo si, $v(\sim A) = 1$.

2. $v(A^\circ) = 0$, si y sólo si, $v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 1$.

Decidibilidad para el sistema C_1 (cuasi-matrices) (da Costa y Alves 1977, sec. 3), (Marcos 1999, sec. 2.2.2)

1. Escriba en una línea una lista de las variables que intervienen en α.
2. Disponga bajo la línea anterior líneas sucesivas conteniendo todas las combinaciones posibles de 0 y 1 que puedan ser atribuídas a las variables.
3. Escriba en una nueva columna, la lista de todas las negaciones de las variables proposicionales; y para cada negación y para cada línea:
   (a) Escriba 1 si en aquella línea la variable a negar toma el valor 0.
   (b) Bifurque la línea y escriba 0 en una parte y 1 en la otra si en aquella línea la variable a negar toma el valor de 1.

Decidibilidad para el sistema C_1 (cont.)

4. Haga una lista de las subfórmulas de A en orden creciente de complejidad y de la negación de las subfórmulas propias de A. Para cada subfórmula B y cada línea:

   (a) Si B no es una subfórmula negada, proceda como en la tabla de verdad del cálculo proposicional clásico.

   (b) Si $B \equiv \neg C$, y si C toma el valor 0 escriba 1, si C toma el valor 1:

      i. Si $C \equiv \neg D$, verifique si D y $\neg D$ toman valores diferentes, en este caso escriba 0, en caso contrario bifurque la línea y escriba 0 en una parte y 1 en la otra.

      ii. Si $C \equiv D \wedge \neg D$, escriba 0.

      iii. Si $C \equiv D \wedge E$ ó $C \equiv D \vee E$ ó $C \equiv D \rightarrow E$, verifique por un lado que D y $\neg D$ toman valores diferentes y por otro lado que E y $\neg E$ toman valores diferentes, en este caso escriba 0, en caso contrario bifurque la línea y escriba 0 en una parte y 1 en la otra.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$B \land \neg B$	$\neg\neg A$	$\neg(B \land \neg B)$	$\neg(A \to B)$	$\neg(A \to B) \land \neg(B \land \neg B)$	$(\neg(A \to B) \land \neg(B \land \neg B)) \to \neg\neg A$
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
			1	1	1	0	0	0	0	1
								1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
		1	1	0	0	0	1	1	1	0
						1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
			1	1	1	1	0	0	0	1
								1	0	1
		1	0	1	0	0	1	0	0	1
								1	1	0
						1	1	0	0	1
								1	1	1
			1	1	1	0	0	0	0	1
								1	0	1
						1	0	0	0	1
								1	0	1

Validez y completitud para C_1:

Algunas definiciones necesarias (da Costa y Alves 1977):

1. Γ es un conjunto **máximal no trivial** de fórmulas si éste no es trivial y para toda A, si $A \notin \Gamma$ entonces $\Gamma \cup \{A\}$ es un conjunto trivial de fórmulas.

2. Una valuación v: $FOR(C_1) \to \{0, 1\}$ es llamada **singular** si existe al menos una fórmula A tal que $v(A) = v(\neg A) = 1$. De lo contrario, la valuación es llamada **normal**.

3. Una fórmula A es **válida** si para cada valuación v, se tiene $v(A) = 1$.

4. Una valuación v es un **modelo** de un conjunto de fórmulas Γ, si $v(A) = 1$ para toda $A \in \Gamma$.

5. $\Gamma \models_{C_1} A$ significa que para todo modelo v de Γ se tiene que $v(A) = 1$.

Algunos teoremas necesarios (da Costa y Alves 1977):

1. Cada conjunto no trivial de fórmulas es contenido en un conjunto máximal no trivial de fórmulas.
2. Existen conjuntos máximales no triviales inconsistentes (ej. $\{A, \neg A\}$).
3. Cada conjunto maximal no trivial Γ tiene un modelo.
4. Cada conjunto no trivial Γ tiene un modelo.
5. Existen conjuntos no triviales inconsistentes que tienen modelos.
6. Existen valuaciones singulares.

Teorema 51 (Validez)**.** *Si* $\Gamma \vdash_{C_1} A$ *entonces* $\Gamma \models_{C_1} A$ *((da Costa y Alves 1977, pág. 623), (Marcos 1999, pág. 48)).*

Teorema 52 (Completitud)**.** *Si* $\Gamma \models_{C_1} A$ *entonces* $\Gamma \vdash_{C_1} A$ *((da Costa y Alves 1977, pág. 624), (Marcos 1999, pág. 48)).*

Capítulo 7

Hacia la lógica universal (Jean-Yves Béziau) ...

Algunos problemas y propuestas:

- *What is classical propositional logic? (a study in universal logic)* (Béziau, de Freitas y Viana 2001).
- *The future of paraconsistent logic* (Béziau 1999).
- *From paraconsistent logic to universal logic* (Béziau 2001).

Aczel, P. (1994). “Schematic Consequence”. En: *What is a Logical System?* Ed. por D. M. Gabbay. Clarendon Press. Cap. 5 (vid. pág. 17).

Antonelli, A. (2001). *Non-Monotonic Logic*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Eprint: `plato.stanford.edu/entries/logic-nonmonotonic/` (vid. pág. 17).

Barbalias, G. (2001). *Self-Reference and Paradoxes*. Eprint: `www.amsta.leeds.ac.uk/~georgeb/`. Esaay prize on the history and philosophy of computability, 2001 (vid. pág. 9).

Beall, J. C. (2002). *Curry's Paradox*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Eprint: `plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/` [01-Jul-2002] (vid. pág. 10).

Béziau, J.-Y. (1999). “The Future of Paraconsistent Logic”. En: *Logical Studies* 2 (vid. págs. 54, 57, 117).

— (2000). “What is Paraconsistent Logic?” En: *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Ed. por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest y J.-P. van Bendegem. Hertfordshire, England: Research Studies Press LTD., págs. 95-111 (vid. págs. 17, 46-48, 51).

— (2001). “From Paraconsistent Logic to Universal Logic”. En: *SORITES (Electronic Magazine of Analytical Philosophy)* 12, págs. 5-32 (vid. pág. 117).

— (2002). “Are paraconsistents negations negations?” En: *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*. Ed. por W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y Í. M. L. D'Ottaviano. Marcel Dekker, págs. 465-486 (vid. págs. 46, 48-51).

Béziau, J.-Y., R. P. de Freitas y J. P. Viana (2001). “What is Classical Propositional Logic? (A Study in Universal Logic)”. En: *Logical Studies* 7 (vid. pág. 117).

Bobenrieth, M. A. (1996). *¿Inconsistencias, Por Qué No?* Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores, División Gráfica (vid. págs. 11, 12, 87, 88, 95, 96, 100, 102, 106, 107).

Bueno, O. (2002). "Can a Paraconsistent Theorist be a Logical Monist?" En: *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*. Ed. por W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y Í. M. L. D'Ottaviano. Marcel Dekker, págs. 535-552 (vid. pág. 102).

Buss, S., A. Kechris, A. Pillay y R. Shore (2001). "The Prospects for Mathematical Logic in Twenty-First Century". En: *The Bulletin of Symbolic Logic* 7.2, págs. 169-196 (vid. pág. 24).

Carnielli, W. A., M. E. Coniglio y Í. M. L. D'Ottaviano, eds. (2002). *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*. Marcel Dekker.

Carnielli, W. A. y J. Marcos (2002). "A Taxonomy of C-systems". En: *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*. Ed. por W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y Í. M. L. D'Ottaviano. Marcel Dekker, págs. 1-94 (vid. págs. 3-5, 7, 8, 15, 16, 20, 21, 46, 59, 62, 66, 74, 75, 77, 78, 80-82, 85, 98).

Curry, H. (1942). "The Inconsistent of Certain Formal Logics". En: *The Journal of Symbolic Logic* 7.3 (oct. de 1942), págs. 115-117 (vid. pág. 10).

D'Ottaviano, Í. M. L. (1990). "On the Development of Paraconsistent Logic and da Costa's Work". En: *The Journal of Non Classical Logic* 7.1/2, págs. 89-152 (vid. págs. 87, 94, 100, 107, 108).

da Costa, N. C. A. (1974). "On the Theory of Inconsistent Formal Systems". En: *Notre Dame Journal of Formal Logic* XV.4, págs. 497-510 (vid. pág. 104).

da Costa, N. C. A. y E. H. Alves (1977). "A Semantical Analysis of the Calculi C_n". En: *Notre Dame Journal of Formal Logic* XVIII.4, págs. 621-630 (vid. págs. 109, 111, 114, 115).

da Costa, N. C. A., J.-Y. Béziau y O. Bueno (1995). "Paraconsistent Logic in a Historical Perspective". En: *Logique & Analyse* 150-152, págs. 111-125 (vid. págs. 55-58).

da Costa, N. C. A., J.-Y. Béziau y O. Bueno (1998). *Elementos de Teoria Paraconsistente de Conjuntos*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. Universidad Estadual de Campinas, Brasil (vid. pág. 10).

da Costa, N. C. A. y L. Dubikajtis (1977). "On Jaśkowski's Discussive Logic". En: *Non-Classical Logics, Model Theory and Computability*. Ed. por A. I. Arruda, N. C. A. da Costa y R. Chuaqui. Vol. 89. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company, págs. 37-55 (vid. pág. 87).

da Costa, N. C. A. y R. A. Lewin (2005). "Lógica Paraconsistente". En: *Lógica*. Ed. por C. E. Alchourrón, J. M. Mendez y R. Orayen. Vol. 7. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Editorial Trotta S.A., págs. 185-204 (vid. págs. 53, 87, 94).

Deutsch, D. y M. Lockwood (1994). "The Quantum Physics of Time Travel". En: *Scientific American* 270 (abr. de 1994), págs. 68-74. DOI: `10.1038/scientificamerican0394-68` (vid. pág. 9).

Dunham, W. (1996). *El Universo de las Matemáticas. Un Recorrido Alfabético por los Grandes Teoremas, Enigmas y Controversias*. Ediciones Pirámide (vid. pág. 10).

Etchemendy, J. (1988). "Tarski on Truth and Logical Consequence". En: *The Journal of Symbolic Logic* 53.1 (mar. de 1988), págs. 51-79 (vid. pág. 17).

Ferrater, M. (1994). *Diccionario de Filosofía*. Vol. I, II, III y IV. Nueva edición revisada, aumentada y actualizada por Josep-Maria Terricabras. Editorial Ariel, S.A. (vid. págs. 4, 5, 9, 10).

Frege, G. (1973). *Estudios sobre Semántica*. 2.ª ed. Editorial Ariel, S.A. (vid. pág. 11).

Gabbay, D. M. (1994a). "What is a Logic System?" En: *What is a Logical System?* Ed. por D. M. Gabbay. Clarendon Press

Gabbay, D. M., ed. (1994b). *What is a Logical System?* Clarendon Press.

Gödel, K. (1989). *Obras Completas*. 2.ª ed. Alianza Universidad (vid. pág. 54).

Gómez Marín, R. (s.f.). *Notas de Clase. Curso de Lógicas No Clásicas. Especialización en Lógica y Filosofía, semestre 2002–1* (vid. pág. 34).

Hacking, I. (1979). "What is Logic?" En: *J. Philos.* 76.6, págs. 285-319 (vid. pág. 17).

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las Matemáticas*. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM (vid. pág. 5).

— (2000). "Mathematical Problems". En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 37.4. Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. 8 (July 1902)., págs. 407-436 (vid. pág. 6).

Hughes, G. E. y M. J. Cressivell (1973). *Introducción a la Lógica Modal*. Estructura y Función. Editorial Tecnos (vid. págs. 90, 91, 93).

Irvine, A. D. (2002). *Rusell's Paradox*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Eprint: `plato.stanford.edu/entries/rusell-paradox/` [01-Jul-2002] (vid. pág. 10).

Jaśkowski, S. (1969). "Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems". En: *Studia Logica* 24, págs. 143-160. DOI: `TODO` (vid. págs. 87-89, 94, 99).

Krause, D. y J.-Y. Béziau (1997). "Relativizations of the Principle of Identity". En: *Logic Journal of the IGPL* 5.3, págs. 327-338. DOI: `10.1093/jigpal/5.3.1-b` (vid. págs. 18, 19).

Ladrière, J. (1969). *Limitaciones Internas de los Formalismos*. Editorial Tecnos (vid. pág. 6).

Marcos, J. (1999). "Semânticas de Traduções Possíveis". Tesis de mtría. U. Estadual de Campinas (vid. págs. 103, 106-111, 115).

Marcos, J. (2002). "Overture: Paraconsistent Logics". En: *Workshop on Paraconsistent Logic, Trento, Italy*. Eprint: `www.cle.unicamp.br/e-prints/abstract_16.html` (vid. pág. 58).

Mendelson, E. (1965). *Introduction to Mathematical Logic*. The university series in undergradete mathematics. D. Van Nostrand Company (vid. pág. 10).

Montes Gutiérrez, J. L. y C. E. Restrepo Ramírez (2002). *Lógicas Paraconsistentes: Una introducción*. Monografía Ingeniería de Sistemas. Universidad EAFIT. Director: Andrés Sicard Ramírez (vid. págs. 32, 33).

Peña, L. (1993). *Introducción a las Lógicas No Clásicas*. Instituto de Investigaciones Filosóficas. Colección: Cuadernos. México D.F.: Universidad Autónoma de México (vid. págs. 28, 33).

Priest, G. y R. Routley (1989a). "An Outline of the History of (Logical) Dialectic". En: *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. Ed. por G. Priest, R. Routley y J. Norman. Philosophia Verlag, págs. 76-98 (vid. pág. 55).

— (1989b). "First Historical Introduction: A Preliminary History of Paraconsistent and Dialethic Approaches". En: *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. Ed. por G. Priest, R. Routley y J. Norman. Philosophia Verlag, págs. 3-75 (vid. pág. 55).

— (1989c). "Systems of Paraconsitent Logic". En: *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. Ed. por G. Priest, R. Routley y J. Norman. Philosophia Verlag, págs. 151-186 (vid. pág. 53).

— (1989d). "The Philosophical Significance and Inevitability of Paraconsistency". En: *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. Ed. por G. Priest, R. Routley y J. Norman. Philosophia Verlag, págs. 483-539 (vid. pág. 54).

Priest, G., R. Routley y J. Norman, eds. (1989). *Paraconsistent*

Rasiowa, H. (1974). *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. Vol. 78. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company (vid. pág. 18).

Rescher, N. (1969). *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill (vid. págs. 32, 34, 41).

Restall, G. (2002). *Substructural Logics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Eprint: `plato.stanford.edu/entries/logic-substructural/` [01-Jul-2002] (vid. pág. 16).

Serény, G. (1999). "Gödel, Tarski, Church, and the Liar". Eprint: `lanl.arXiv.org/abs/math/9903005` (vid. pág. 13).

Sierra, M. (2001). *Inferencia Visual para Lógicas Normales*. Fondo Editorial Universidad EAFIT (vid. págs. 90, 93).

Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics*. Clarendon Press (vid. págs. 16, 17).

Williams, J. (1981). "Inconsistency and Contradiction". En: *Mind, New Series* 90.360 (nov. de 1981), págs. 600-602 (vid. pág. 8).