

¿MÁQUINA DE TURING CUÁNTICA AUTORREFERENCIAL: UNA POSIBILIDAD?

Andrés Sicard

asicard@sigma.eafit.edu.co

Mario Vélez

mvelez@sigma.eafit.edu.co

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT

Resumen: El objetivo del proyecto de investigación es construir un formalismo para la idea intuitiva de *Máquina de Turing Cuántica Autorreferencial*. Para ello: (i) Se presentan cuatro formulaciones diferentes y equivalentes de la Mecánica Cuántica y se elige el formalismo de Dirac, para presentar una aproximación a la Computación Cuántica desde los postulados de la Mecánica Cuántica; (ii) Para las máquinas de Turing cuánticas se presentan tres elementos: sus componentes, su operador de evolución temporal y su función de transición local; estos elementos son relacionados con las máquinas de Turing determinísticas, probabilísticas y reversibles; (iii) Se establecen algunas relaciones entre la tesis de Church-Turing y la computación cuántica, (iv) Se presentan los algoritmos de Shor y Grover y su implementación en $MATHEMATICA^{TM}$ y QCL (*Quantum Computer Language*) respectivamente; (v) Finalmente, la posibilidad de autorreferencia para una máquina de Turing cuántica es presentada desde dos puntos de vista: auto-modificación y auto-medida.

Abstract: The research's objective is constructing a formalism for the intuitive idea of *self-referential quantum Turing machine*. for it, (i) We introduce four different and equivalent formulations of the Quantum Mechanics and we are elected Dirac's formalism for introducing an approach to the Quantum Computing from Quantum Mechanics' postulates; (ii) For quantum Turing machines we present three elements: Its components, its time evolution operator and its local transition function, this elements are are related with deterministic, probabilistic and reversible Turing machines; (iii) We establish some relations between the thesis Church-Turing and quantum computing; (iv) We present Shor's and Grover's algorithms and their simulation in $MATHEMATICA^{TM}$ and QCL (Quantum Computer Language) respectively; (v) Finally, the self-reference possibility for quantum Turing machine is introduce from two point of view: self-modification and self-measure.

Presupuesto: \$8,682,856

Financiación: Este proyecto fue financiado por la Universidad EAFIT, como proyecto de investigación No. 817407.

Duración: Un año.

1 Introducción

1.1 Presentación del proyecto de investigación

La noción de *procedimiento computable*, es decir, aquellos procedimientos que pueden ser computados por una máquina de Turing, se agota en la indagación y la explicación de la complejidad del mundo que habitamos. Estamos ante la gestación de nuevas ciencias que propugnan un cambio de paradigma, ya no el paradigma determinístico, bivalente, consistente; si no algún(os) paradigma(s) que admitan la construcción de operadores epistemológicos (término tomado prestado a nuestro profesor Raúl Gómez [9]) que inserten algunos principios complejos: dialógica, recursividad, holística [15], autorreferencia, inconsistencia, indeterminismo, entre otros.

La investigación que realizamos en el año 1997 -Máquinas de Turing Dinámicas- estaba inscrita en este campo problemático, la ampliación de la noción de procedimiento computable (para una visión más general concerniente a este importante tópico, sugerimos al lector la referencia [23]). Los resultados de imposibilidad obtenidos [24] no nos desanimaron, por el contrario nos han permitido madurar el problema y intentar otras alternativas de abordarlo. Durante el año de 1998 hemos formado un grupo de trabajo con la matemático María Eugenia Puerta y desarrollamos un proyecto de investigación -Lenguaje subyacente a la noción de máquina cuántica- dirigido a entender los fundamentos de la computación cuántica [25], fundamentos que una vez entendidos, nos permitieron intentar pensar la noción de procedimiento computable apoyados en los constructos conceptuales que nos ofrecen la computación cuántica.

Desde diferentes ciencias vemos emerger nuevas máquinas de guerra [9] en pos de la complejidad. En biología, surgen modelos que simulan la evolución de algunos subsistemas de los sistemas vivos [12, 19] en donde dado la complejidad de dichos subsistemas, los procesos no son computables. Por otro parte y desde una perspectiva más formal, lógicas divergentes a la lógica aristotélica son gestadas, siendo la lógica paraconsistente [2] una de las propuestas más fértiles que (a nuestro modo de ver) catalizarán una profunda reflexión-revisión de la imposición de la propiedad de consistencia absoluta a nuestras teorías científicas. La física tampoco ha sido ajena a este proceso, solo mencionaremos que uno de los físicos actuales de mayor prestigio, defiende la necesidad de una nueva física para manipular los procesos no computables involucrados en el análisis del problema del conocimiento consciente [17, 18].

La teoría de la computabilidad tampoco ha sido ajena a este proceso, sabemos de desarrollos no clásicos en diferentes áreas: Máquinas de Turing de tiempo infinito [10], el área de la computabilidad continua-analógica ha obtenido bastantes logros, inclusive es en este contexto en donde se habla de "Super Turing Theories" [27]. La(s) tesis de Church-Turing es analizada desde el punto de vista intencional de sus autores, hallando diferencias entre los conceptos de computabilidad y recursión [28], o son separadas en una tesis matemática -tesis de Church- y una tesis física

-tesis de Turing- [18]. Por otra parte la teoría de la computabilidad clásica continua sus desarrollos en líneas hiperespecializadas tales como: computabilidad de ordenes superiores, grados de Turing, grados de insolubilidad, computabilidad sub-recursiva, entre otras [20].

Por supuesto que no dominamos todos las temáticas mencionados, pero la mención de éstas, nos permiten ilustrar nuestra posición ante las ciencias factuales, la filosofía y las ciencias formales. Estamos convencidos que el quehacer de la física, de la biología, etc., no es ajeno al quehacer de la matemática, de la lógica y ellos no pueden ser ajenos al quehacer filosófico. No son campos del saber antagónicos, por el contrario son campos del saber complementarios, constituyentes de un nudo gordiano el cual no tiene sentido intentar desatar. Esperamos poder transitar por estos campos al hilo de nuestros problemas.

Con base en la noción de deseo de Lyotard:

"El deseo no pone en relación una causa y un efecto, sean cuales fueren, sino que es el movimiento de algo que va hacia lo otro como hacia lo que le falta a sí mismo. Eso quiere decir que lo otro está presente en quien desea, y lo está en forma de ausencia. Quien desea ya tiene lo que le falta, de otro modo no lo desearía, y no lo tiene, no lo conoce, puesto que de otro modo no lo desearía." [14, p. 81]

afirmamos que es nuestro deseo pensar en el constructo teórico que hemos denominado *máquina cuántica autorreferencial*, la cual intuitivamente consiste en una máquina cuántica que puede expresarse sobre sí misma.

Para ello, examinaremos la MTQ propuesta por David Deutsch [7] en relación con la noción de *Máquina de Turing Probabilística (MTP)* y en relación con la *Máquina de Turing (MT)*. Adicionalmente se establecerá la relación entre la MTQ y la tesis de Church-Turing. Finalmente, pero como *núcleo* de nuestro proyecto, abordaremos el problema de la construcción de una *Máquina de Turing Cuántica Autorreferencial (MTQA)*.

El proyecto cuenta además con otro matiz que puede ser considerado complementario y anexo a los anteriores, este matiz representa la línea aplicada del proyecto y consiste en desarrollar la habilidad de la implementación de algoritmos bajo el paradigma de la computación cuántica, más específicamente, estos algoritmos serán implementados en simuladores de computadores cuánticos.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Construir un formalismo para la idea intuitiva de *Máquina de Turing Cuántica Autorreferencial* o en su defecto justificar la imposibilidad de dicha construcción.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Estudiar la relación entre la Máquina de Turing y la Máquina de Turing Probabilística.
2. Estudiar la relación entre la Máquina de Turing Probabilística y la Máquina de Turing Cuántica.

3. Establecer la relación entre la Máquina de Turing Cuántica y algunas interpretaciones de la tesis de Church-Turing.
4. Realizar programación bajo el paradigma de la computación cuántica.

2 Descripción de la metodología

La investigación fue dividida en las etapas presentadas a continuación.

2.1 Máquina de Turing (MT) y Máquina de Turing Probabilística (MTP)

Se define formalmente una *Máquina de Turing Determinística* (MT) por una cuadrúpla $\mathfrak{MT} = \langle Q, \Sigma, M, \delta \rangle$ ¹ donde:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$: Conjunto finito de estados de la máquina ($Q \neq \emptyset$).

$\Sigma = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_m\}$: Alfabeto. Conjunto finito de símbolos de entrada - salida. Adoptamos por convención que $s_0 = \square$ (símbolo vacío) ($\Sigma - s_0 \neq \emptyset$).

$M = \{L, R, N\}$: Conjunto de movimientos (L : izquierda, R : derecha, N : no movimiento).

δ : Es una *función* definida de un subconjunto $K \times \Sigma$ en $\Sigma \times M \times K$. El lector debe notar que la función δ está definida sobre un subconjunto de $K \times \Sigma$ porque no es necesario que exista una instrucción para cada una de las situaciones (estado, símbolo) teórica (el conjunto formado por $K \times \Sigma$) en las que puede estar la máquina. Además, el *concepto de función refleja la propiedad determinística* de las máquinas de Turing determinísticas. δ también puede ser definida como un conjunto *finito*² de instrucciones $\delta = \{i_0, i_1, i_2, \dots, i_p\}$ donde cada i_j es una quintupla de la forma: $q_m s_m s_n m q_n$, donde $q_m, q_n \in K$; $s_m, s_n \in \Sigma$; $m \in M$.

Por otra parte, una *Máquina de Turing No Determinística* (MTND) es similar a una Máquina de Turing Determinística *excepto* por el carácter “funcional” de δ . En una MTND, δ es una *relación* definida de un subconjunto $K \times \Sigma$ en $\Sigma \times M \times K$. Bajo estas circunstancias la relación δ determina *parcialmente* el movimiento de la MTND y se hace necesario contar con un *operador externo* [29, p. 232] que realice una selección del movimiento a realizar. Este operador externo puede ser implementado bajo diferentes modalidades, siendo una de ellas una función de probabilidad; en este caso se habla de máquinas de Turing Probabilística (MTP).

Nuestra primer etapa será entonces establecer la relación entre una MT y una MTP.

2.2 Máquina de Turing Probabilística (MTP) y Máquina de Turing Cuántica (MTQ)

Presentamos (parcialmente) la descripción de una Máquina de Turing Cuántica (MTQ).

Con relación a los elementos *estáticos* de una MTQ tenemos los siguientes:

1. Estados

La MTQ contiene un conjunto *finito* definido por un conjunto *finito* de M observables de espectro $\{0, 1\}$ ³ representados por:

$$\{\hat{n}_i\} \quad (i \in \mathbb{Z}_M),$$

donde $\mathbb{Z}_M = \{0, 1, \dots, M-1\}$. Es decir, el conjunto de estados de una MTQ es un conjunto de observables $\{\hat{n}_0, \hat{n}_1, \dots, \hat{n}_{M-1}\}$, este conjunto será representado por $\hat{\mathbf{n}}$.

2. Cinta

La *memoria* de la MTQ que corresponde a la cinta unidimensional bi-infinita en la MT, está definida por un conjunto *infinito* de observables de espectro $\{0, 1\}$ representados por:

$$\{\hat{m}_i\} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Es decir, la memoria (cinta) en una MTQ es un conjunto de observables $\{\dots, \hat{m}_{-1}, \hat{m}_0, \hat{m}_1, \dots\}$, este conjunto será representado por $\hat{\mathbf{m}}$ y puede ser interpretado afirmando que cada observable $\hat{m}_i$ corresponde a una celda en la cinta infinita bidimensional:

cinta	...				...
observables	...	$\hat{m}_{-1}$	$\hat{m}_0$	$\hat{m}_1$	...

3. Posición actual

La posición actual en la memoria (cinta) en una MTQ se define por un observable $\hat{x}$ de espectro los $\mathbb{Z}$.

Para hablar de los elementos *dinámicos* de una MTQ es necesario hablar del *estado* (función de estado) de la MTQ. El estado de la MTQ se representa por un vector unitario en el espacio de Hilbert *spanned* por los vectores propios simultáneos correspondientes a los observables de la posición actual $\hat{x}$, al conjunto de estados de la máquina $\hat{n}_i$ y a la memoria (cinta) de la máquina $\hat{m}_i$; este estado se representa por:

$$|x; \mathbf{n}; \mathbf{m}\rangle \equiv |x; n_0, n_1 \dots n_{M-1}; \dots m_{-1}, m_0, m_1 \dots \rangle.$$

¹Esta definición puede tener varias variantes de acuerdo al “gusto” de cada autor. Una de ellas es definir la máquina de Turing como un conjunto finito de instrucciones, ya que este conjunto da implícitamente el conjunto de símbolos utilizados y los posibles estados de la máquina.

²La finitud de este conjunto está determinada implícitamente por la finitud del conjunto de estados K y la finitud del alfabeto Σ .

³Aunque el espectro de los observables en física es comunmente $\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$, se selecciona el espectro $\{0, 1\}$ por tener una interpretación natural con un *bit* de memoria ([7], pág. 103)

Este estado de la MTQ puede ser representado por la función de estado $\psi(T)$ cuya evolución temporal está dada por:

$$|\psi(nT)\rangle = \mathbf{U}^n |\psi(0)\rangle \quad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

En este caso, $\psi(0)$ representa el estado inicial (posición actual, información en la memoria (cinta), estado actual) de la MTQ, $\psi(nT)$ representa la evolución a un estado siguiente en el tiempo y $\mathbf{U}$ es el operador que *realiza* la evolución temporal de la MTQ.

La relación entre la MTP y la MTQ constituye la siguiente etapa de nuestro proyecto.

2.3 Máquina de Turing Cuántica (MTQ) y tesis de Church-Turing

La reinterpretación *física* que realiza Deutsch de la tesis de Church-Turing: “*Every ‘function which naturally be regarded as computable’ can be computed by the universal Turing machine*” [7, p. 99], en lo que él denomina *principio* de Church-Turing: “*Every finitely realizable physical system can be perfectly simulated by a universal model computing machine operation by finite means*” [7, p. 99], permite “interpretar” una posible invalidación de la tesis de Church-Turing (por lo menos desde el punto de vista Deutsch).

El propio Deutsch es bastante enfático en este punto y afirma lo siguiente “... *there is no apriori reason why physical laws should respect the limitations of the mathematical processes we call ‘algorithms’ ...*”, lamentablemente para nuestro propósito continua con la siguiente frase “*Although I shall not in this paper find it necessary to do so, there is nothing paradoxical or inconsistent in postulating physical systems which compute functions not in $C(F)$* ” ([7], pág. 101) ⁴.

Sin embargo, existe un resultado contradictorio (bajo ciertas restricciones) con la idea de Deutsch, este resultado afirma lo siguiente: “*Uno de los argumentos más sólidos en favor de la tesis de Church ha sido propuesto por R. Gandy, quien ha demostrado que los mecanismos de todas las máquinas constructibles por la mecánica newtoniana no pueden calcular sino funciones programables*” ([6], pág. 81).

Entonces nuestra siguiente etapa será el establecer la relación entre la MTQ y algunas interpretaciones de la tesis de Church-Turing.

2.4 Máquina de Turing Cuántica Autorreferencial (MTQA)

Esta etapa es el *núcleo* de nuestro proyecto de investigación. Una vez realizadas las etapas anteriores y con la competencia adquirida en su desarrollo, emprendemos la construcción de una MTQA.

En un sistema cuántico diferenciamos entre el *estado del*

sistema (función de estado) y los *observables (operadores)* del sistema. Como su nombre lo indica, los observables del sistema son aquellas propiedades que podemos medir en el sistema. Bajo la teoría cuántica existe una relación entre el medir un observable y el estado del sistema, esta relación puede ser descrita en lenguaje técnico afirmando que una vez se obtiene un valor de un observable; es decir, se obtiene un valor propio correspondiente al operador que representa el observable, el estado del sistema colapsa al vector propio asociado al valor propio que se obtuvo en la medida. Lo que afirma esta relación es que el estado de un sistema cuántico se modifica una vez se realice una medida sobre él.

Con base en lo anterior, nuestra hipótesis consiste en construir una MTQ que sea capaz de observarse ella misma, si esto es posible implicaría que una vez que la MTQ se observa, ella modifica su estado y se convertiría en una MTQA. Por supuesto nuestra hipótesis exige construir un contexto adecuado para la noción de *medir*, que posiblemente no sea el contexto tradicionalmente aceptado, además exige realizar las construcciones formales para modelar las auto-modificaciones realizadas por la MTQA.

2.5 Programación cuántica

Aunque el proyecto de investigación que se presenta es en esencia un proyecto teórico, el área de la computación cuántica contiene una gran elemento pragmático que no queremos dejar pasar completamente inadvertido. Por una parte, aunque existen investigaciones acerca de la posible construcción de máquinas cuánticas [13], por el momento éstas son investigaciones restringidas a grandes centros de investigación, sin embargo, en la actualidad se han construido varias simulaciones de computadores cuánticos en donde es posible realizar programación cuántica, sin la necesidad de contar con una máquina cuántica real.

Esta etapa de investigación desarrollada en conjunto con los estudiantes, Carlos Arturo Pérez, Catalina Gutiérrez, Fredy Gallego y Luis Fernando Deossa de la carrera de Ingeniería de Sistemas, ilustra como realizar programación cuántica en dos simuladores diferentes. Un primer simulador es el QCL (*Quantum Computer Language*) desarrollado por Bernhard Ömer [31, 32], en éste se implementa el algoritmo de Lov K. Grover [8, 11] para la búsqueda en una base de datos desordenada, un segundo simulador es construido por Colin Williams y Scott Clearwater [30] en *Mathematica*® v3.0 y en este simulador se implementa el algoritmo desarrollado por Peter Shor [21, 22], para la factorización de números enteros.

3 Conclusiones

1. Después de los trabajos sobre la Mecánica Cuántica realizados por Planck, Einstein, Schrödinger, Heisenberg, Dirac, Feynman y muchos otros, el mundo de la ciencia tuvo que contribuir irremediamente para que la nueva mecánica, alcanzara una nueva

⁴ $C(F)$ es el conjunto de la funciones Turing-computables en la notación de Deutsch.

fase; la formalización. De las cuatro formulaciones de la Mecánica Cuántica (Schröndiger (ondulatoria), Heisenberg (matricial), Dirac y Jordan (invariante) y Feymann (integral de camino)), la más adecuada para la descripción en términos de postulados, es la de Dirac.

La Computación Cuántica ha sufrido un desarrollo paralelo desde los años 80 cuando Feynman la sugirió, pasando por los enunciados de Peter Shor sobre la factorización de números en 1994, hasta nuestros días donde se reclama su formalización. Este trabajo de alguna manera contribuye a la búsqueda de los elementos necesarios para esclarecer, tomando como referente la axiomática de la Mecánica Cuántica, los elementos para una posible formalización axiomática de la Computación Cuántica.

2. Existen algunos modelos “clásicos” equivalentes de máquinas de Turing (determinísticas, reversibles, probabilísticas). Un modelo reciente denominado máquina de Turing cuántica puede ser comparado con los anteriores. Desde una perspectiva “física”, es decir, desde el punto de vista del operador de evolución U , una máquina de Turing cuántica puede ser pensada como una máquina de Turing reversible y desde una perspectiva “matemática”, es decir, desde el punto de vista de la función de transición local δ , una máquina de Turing cuántica, puede ser pensada como una máquina de Turing reversible y como una máquina de Turing probabilística.
3. Una historia de la tesis de Church-Turing es la siguiente: definición de Church⁵, definición de Turing⁶, tesis de Church y tesis de Turing⁸, tesis de Church-Turing⁹, tesis M (debida a Robin Gandy)¹⁰ y principio de Church-Turing (debido a David Deutsch)¹¹. La tesis de Church-Turing es acerca de *computors* (“*idealized human calculating in a purely mechanical fashions*”

⁵**Definición de Church:** “We now define the notion, already discussed, of an *effectively calculable* function of positive integers by identifying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a λ -definable function of positive integers). This definition is thought to be justified by considerations which follow, so far as positive justification can ever be obtained for the selection of a formal definition to correspond to intuitive notion.” [3, p. 356]

⁶**Definición de Turing:** “The “computable” numbers⁷ include all numbers which would naturally be regarded as computable.” [29, p. 249]

⁸**Tesis de Church y tesis de Turing:** “The theses of Church and Turing were not even called “thesis” at all until Kleene (1943, p. 60) (Kleene, S.C. 1943. Recursive predicates and quantifiers. Transactions of the American Mathematical Society, vol 53. p. 60) referred to Church’s “definition” as “Thesis I” and the 1952 Kleene (Kleene, S.C. Introduction to metamathematics. Wolters-Noordhoff Publishing. Groningen, 1952.) referred to “Church’s Thesis” and “Turing’s Thesis”.” [28, pp. 295-296]

⁹**Tesis de Church-Turing:** “The term ‘Church-Turing thesis’ seems to have been first introduced by Kleene, with a small flourish of bias in favor of Church” [4, pp.3-4]

¹⁰**Tesis M:** “Whatever can be calculated by a machine (working on finite data in accordance with a finite program of instructions) is Turing machine computable.” [4]

¹¹**Principio de Church-Turing:** “Every finitely realizable physical system can be perfectly simulated by a universal model computing machine operation by finite means.” [7, p. 99]

¹²Se presenta como se puede generar un número aleatorio desde la computación cuántica. Sea $|x\rangle$ un qubit en el estado $|0\rangle$ y sea H el operador de Hadamard definido por:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ H|1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Entonces, se aplica el operador de Hadamard al qubit $|0\rangle$ y se obtiene un estado superpuesto $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$. Después, se observa el estado superpuesto. “*The act of observation causes the superposition to collapse into either $|0\rangle$ or the $|1\rangle$ state with equal probability. Hence you can exploit quantum mechanical superposition and indeterminism to simulate a perfectly fair coin toss.*” [30, p. 160]

[28]), mientras que la tesis M es acerca de *máquinas que calculan*; con alguna frecuencia se mal interpreta la tesis de Church-Turing como la tesis M.

David Deutsch introduce una máquina de Turing cuántica general, esta máquina puede ser pensada como una máquina de Turing cuántica bajo algunas consideraciones. Las máquinas de Turing no satisfacen el principio de Church-Turing debido a que su espacio de computación es discreto, por su parte las máquinas de Turing cuánticas si satisfacen dicho principio [7]. Las máquinas de Turing cuánticas computan únicamente las funciones Turing-computables, pero son capaces de realizar procesos que no puede realizar una máquina de Turing, como lo es la generación de números aleatorios (no pseudo-aleatorios)¹².

4. En relación con la posibilidad de auto-modificación de una máquina de Turing cuántica, esta auto-modificación permitiría pensar que una máquina de Turing cuántica fuera un modelo de hipercomputación, es decir, un modelo de computación que pudiera computar funciones no Turing-computables; sin embargo, este no es el caso y los conjuntos de las funciones Turing-computables y las funciones computables por una máquina de Turing cuántica son coextensivos [7, 16, 26]. Tal como ya ha sido expresado por los autores anteriormente [26], una buena posibilidad de contar con modelos de computación más potentes (en términos de lo que éstos pueden computar), es modificar la lógica subyacente a los mismos. En particular, una hipótesis de trabajo consiste en pensar en modelos de computación contruidos sobre una lógica paraconsistente y esta hipótesis cobra mayor fuerza en el contexto de las máquinas de Turing cuánticas, debido a la existencia de ciertas formulaciones de la mecánica cuántica que involucran elementos de teorías paraconsistentes [5], lo cual permitiría pensar en lógicas cuánticas paraconsistentes y sobre éstas, en modelos

de computación cuánticos paraconsistentes.

En relación con la posibilidad de auto-medida de una máquina de Turing cuántica, si la situación presentada de un autómata cuántico se generalizará por medio de un segundo autómata que hiciera predicciones sobre el comportamiento del primero, y un tercer autómata que hiciera predicciones sobre el comportamiento del segundo autómata y así sucesivamente, se tendría una jerarquía de niveles de medida, en primer lugar, medidas que producen conocimiento de un algún sistema externo, en segundo lugar, medidas que producen no solo conocimiento de algún sistema externo, sino además conocimiento del conocimiento del autómata acerca del sistema, y así sucesivamente [1]. Pero de mayor importancia para los autores, sin importar las diferencias entre una máquina de Turing cuántica y un autómata cuántico como el presentado para realizar la autorreferencia y sin considerar la posibilidad o no de su realización, es que el autómata cuántico presentado es posible dentro del formalismo empleado por la mecánica cuántica y dentro de una de sus posibles interpretaciones, y este constructo teórico, deja varios interrogantes sin responder y abre la puerta a nuevas posibilidades y a nuevos problemas.

Referencias

- [1] DAVID Z. ALBERT. A quantum-mechanical automaton. *Philosophy of Science* **54**, 577–585 (1987).
- [2] M. ANDRÉS BOBENRIETH. “¿Inconsistencias, por qué no?” Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores, División Gráfica (1996).
- [3] ALONSO CHURCH. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics* **58**(2), 345–363 (1936).
- [4] B. JACK COPELAND. The Church-Turing thesis. Stanford Encyclopedia of Philosophy (1996).
- [5] NEWTON C. A. DA COSTA Y RENATO A. LEWIN. Lógica paraconsistente. En “Enciclopedia IberoAmericana de Filosofía”, tomo 7: Lógica, páginas 185–204. Madrid: Editorial Trotta, S.A. (1995).
- [6] PAUL DELAHAYE. Creaciones informáticas: un juego universal de herramientas de cálculo. *Investigación y Ciencia* páginas 80–83 (abril 1996).
- [7] DAVID DEUTSCH. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97–117 (1985).
- [8] LOV K. GROVER. A fast quantum mechanical algorithm for database search. En “Proc. of the twenty-eighth annual ACM symposium on theory of computing (STOC ’96)”, páginas 212–219. ACM Press, New York, NY, USA (1996).
- [9] RAÚL GÓMEZ. Meditaciones: de los mathématas lógico-textuales o de los juegos de la complejidad. En “Complejidad: trabajo transdisciplinario para mejorar la producción y la creatividad - Edgar Morin”. Medellín: U. Pontificia Bolivariana (Febrero 1977).
- [10] JOEL HAMKINS Y ANDY LEWIS. Infinite time Turing machines. *The Journal of Symbolic Logic* **65**(2), 567–604 (june 2000).
- [11] RICHARD JOZSA. Searching in Grover’s algorithm. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/9901021 (1999).
- [12] GEORGE KAMPIS. Life-like computing beyond the machine metaphor. Eprint: hps.elte.hu/Papers/ (1992).
- [13] SETH LLOYD. A potentially realizable quantum computer. *Science* **261**, 1569–1571 (september 1993). Preprint: 133.41.37.194/projects/QTm/textfiles/lloyd.tex.
- [14] JEAN F. LYOTARD. “¿Por qué filosofar?” Colección: Grandes Obras del Pensamiento. Barcena: Ediciones Altaya S.A. (1964).
- [15] EDGAR MORIN. “Introducción al pensamiento complejo”. Colección: Ciencias Cognitivas. Barcelona: Editorial GEDISA (1990).
- [16] MASANAO OZAWA. Measurability and computability. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/9809048 (1998).
- [17] ROGER PENROSE. “The emperor’s new mind concerning computers, minds and the laws of physics”. Oxford University Press (1989).
- [18] ROGER PENROSE. “Las sombras de la mente”. Colección: Drakontos. Barcelona: Crítica (1996).
- [19] LUIS M. ROCHA. Artificial semantically closed objects. Eprint: ssie.binghamton.edu/~rocha/tilsccai.html (1994).
- [20] HARTLEY ROGERS. “Theory of Recursive Functions and Effective Computability”. The MIT Press, 3rd edición (1992).
- [21] PETER W. SHOR. Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring. En “Proc. 35th Symposium on Foundations of Computer Science”, páginas 124–134, Los Alamitos, CA (1994). IEEE Computer Society Press. Preprint: citeseer.ist.psu.edu/14533.html.
- [22] PETER W. SHOR. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.* **26**(5), 1484–1509 (1997).
- [23] ANDRÉS SICARD. ¿Más allá de la computabilidad? (algunas reflexiones acerca de). *Rev. U. EAFIT* **112**, 91–100 (1998).

- [24] ANDRÉS SICARD RAMÍREZ. Máquinas de Turing dinámicas: historia y desarrollo de una idea. Tesis de Maestría, U. EAFIT, Departamento de Informática y Sistemas (1998).
- [25] ANDRÉS SICARD RAMÍREZ, MARÍA EUGENIA PUERTA YEPES Y MARIO ELKIN VÉLEZ RUIZ. Lenguaje subyacente a la noción de máquina cuántica (1998). U. EAFIT. Grant: 817405.
- [26] ANDRÉS SICARD-RAMÍREZ Y MARIO E. VÉLEZ-RUIZ. The Church-Turing thesis. (Preprint) (1999).
- [27] HAVA T. SIEGELMANN. Computation beyond the Turing limit. *Science* **268**, 545–548 (28 april 1995).
- [28] ROBERT I. SOARE. Computability and recursion. *The Bulletin of Symbolic Logic* **2**(3), 284–321 (sept. 1996).
- [29] ALAN M. TURING. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.* **42**, 230–265 (1936-7). A correction, *ibid*, vol. 43, no. 2198, p. 544–546, 1937.
- [30] COLIN P. WILLIAMS Y SCOTT H. CLEARWATER. “Explorations in quantum computing”. New York: Springer-Telos (1997).
- [31] BERNHARD ÖMER. Simulation of quantum computers. Eprint: tph.tuwien.ac.at/~oemer/prakt.ps (1996).
- [32] BERNHARD ÖMER. A procedural formalism for quantum computing. Tesis de Maestría, Technical University of Vienne, Department of Theoretical Physics (1998).