Hipercomputación desde la computación cuántica

Informe final de investigación

Andrés Sicard Ramírez (investigador principal)
Mario Elkin Vélez Ruiz (co-investigador)
Juan Fernando Ospina Giraldo (asistente de investigación)

Grupo de investigación en Lógica y Computación
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia
2006

Índice

1. Información proyecto

Título del proyecto	Hipercomputación desde la computación cuántica
Investigador principal	Andrés Sicard Ramírez
Co-investigador	Mario Elkin Vélez Ruiz
Auxiliar de investigación	Juan Fernando Ospina Giraldo
Grupo de investigación	Grupo en Lógica y Computación. Universidad EAFIT
Entidades financiadoras	Universidad EAFIT y Colciencias
Código del proyecto	1216-05-13576
Número del contrato	CT-285-2003
Fecha de ejecución	Abril 2004 - Abril 2006

2. Sinopsis divulgativa

La hipercomputación es la teoría de las hipermáquinas o hipercomputadores. El término 'hipercomputador' o 'hipermáquina' denota cualquier dispositivo de procesamiento de información capaz de solucionar problemas que no pueden ser solucionados por una máquina de Turing [6], la cual constituye el modelo estándar aceptado de computación. Aunque existen diferentes modelos teóricos de hipercomputación propuestos desde diferentes disciplinas tal como las lógicas no clásicas, las redes neuronales o la física relativista, entre otras [29, 5, 20, 33], la pregunta por su posible o imposible construcción permanece sin respuesta.

De otra parte, la computación cuántica emplea la mecánica cuántica en el procesamiento de la información, en la medida en que se usan sistemas microscópicos y se sigue su evolución con las leyes de la mecánica cuántica; para el registro, transmisión y procesamiento de la información. Se establece pues la computación cuántica y la información cuántica como *the study of the information processing tasks that can be accomplished using quantum mechanical systems* [4, p. 1]. En términos generales, un modelo de computación cuántica está construido con base en un referente físico, el cual determina las características computacionales de los algoritmos cuánticos construidos sobre dicho modelo.

Uno de los problemas incomputables por una máquina de Turing es el décimo problema de Hilbert [17] que está relacionado con las ecuaciones de la forma $D(x_1, \ldots, x_k) = 0$, donde D es un polinomio con coeficientes enteros. Este tipo de ecuaciones son denominadas ecuaciones Diofantinas y el décimo problema de Hilbert es enunciado como: ¿Dada una ecuación Diofantina, es posible construir un procedimiento para determinar si la ecuación tiene o no solución en los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$?

El primer modelo de computación cuántica (de acuerdo al conocimiento de los autores) que directamente atacó el problema de la hipercomputación, fue el modelo propuesto por Tien D. Kieu ([13] y las referencias incluidas), en el cual presentó un algoritmo diseñado para solucionar el décimo problema de Hilbert, empleando como referente físico el oscilador armónico simple el cual tiene como álgebra dinámica asociada el álgebra de Lie Weyl-Heisenberg.

El problema de investigación propuesto consistió en construir nuevos modelos y algoritmos de hipercomputación sustentados en la computación cuántica. El principal resultado obtenido fue la adaptación del algoritmo de Kieu (AK) al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$, a partir de la identificación

de las características requeridas por un álgebra dinámica para llevar a cabo esta adaptación [28, 26]. A partir de esta adaptación algebraica, es decir, de esta adaptación independiente del referente físico, se adaptó el AK a algunos referentes físicos en el campo de la materia condensada, la óptica cuántica y la física matemática [28, 36, 35, 30, 24].
Las adaptaciones algebraicas del AK realizadas por los autores establecen que las propiedades algebraicas requeridas por el algoritmo de Kieu no son exclusivas del algebra Weyl-Heisenberg. Por otra parte, las adaptaciones del AK realizadas sobre algunos referentes físicos amplian el espectro de posibilidades sobre el cual es posible considerar una implementación del AK.

3. Sinopsis técnica

Resumen

El problema de investigación propuesto consistió en construir nuevos modelos y algoritmos de hipercomputación [5, 29] sustentados en la computación cuántica, a partir de la adaptación del algoritmo de Kieu (AK) ([13] y las referencias incluidas) a algunos referentes físicos diferentes al empleado por éste. El AK esta diseñado para para solucionar un problema incomputable por una máquina de Turing: el décimo problema de Hilbert [17]; y emplea como referente físico el oscilador armónico simple, el cual tiene como álgebra dinámica asociada el álgebra de Lie Weyl-Heisenberg.
Un análisis detallado del AK refleja que sus características de hipercomutación subyacen en el álgebra dinámica asociada al referente físico empleado, y en la posibilidad de una evolución adiabática establecida entre ciertos Hamiltonianos no acotados [3]. El principal resultado obtenido fue la adaptación del AK al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$, a partir de la identificación de las siguientes características requeridas por el álgebra dinámica [28, 26]:

- Admitir una representación infinita-dimensional irreducible que actúa sobre la base del espacio de Hilbert asociado al Hamiltoniano del referente físico.
- Admitir la factorización del Hamiltoniano del referente físico en términos de los generadores del álgebra.
- Permitir la construcción de un operador número tal que sus autovectores sean los autovectores del Hamiltoniano asociado al referente físico y sus autovalores sean los números naturales $\mathbb{N}$.
- Permitir la construcción de estados coherentes.

A partir de esta adaptación algebraica, se adaptó el algoritmo de Kieu a los siguientes referentes físicos cuya álgebra dinámica es $\mathfrak{su}(1,1)$: la caja de potencial infinita [30, 24], potenciales Pöschl-Teller [36, 35], oscilador de Laguerre generalizado, cilindro de potencial infinito, cilindro de potencial infinito modificado y el sistema Holstein-Primakoff [28]. Por otra parte, en sentido estricto las adaptaciones indicadas están basadas en el álgebra $\mathfrak{su}^k(1,1) \equiv \mathfrak{su}(1,1) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{su}(1,1)$ y se está realizando una adaptación del AK sobre el álgebra $su(k,1)$ [27]. Además, a partir de una cierta álgebra que interpola entre las álgebras Weyl-Heisenberg y $\mathfrak{su}(1,1)$ [32], se está realizando una generalización del AK que contiene como casos particulares el AK y las adaptaciones realizadas sobre el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ [25].

La adaptación algebraica realizada por los autores establece que las propiedades algebraicas requeridas por el AK no son exclusivas del algebra Weyl-Heisenberg y las adaptaciones realizadas sobre algunos referentes físicos amplian el espectro de posibilidades sobre el cual es posible considerar una implementación del AK.

Abstract

The proposed research problem was the construction of a new hypercomputation models [5, 29] based on quantum computation. In particular, we proposed to adapt Kieu's algoritmh (KA) to other physical referents ([13] and references therein). KA was proposed to solve a Turing machine incomputable problem, Hilberts tenth problem [17], and KA uses as physical referent the simple harmonic oscillator which has as associated dynamical algebra the Lie algebra Weyl-Heisenberg.

A detailed analysis of KA shows that its hypercomputational power is underlying in the dynamical algebra associated to the physical referent, and the possibility of established an adiabatic evolution between some unbounded Hamiltonians [3]. The main obtained result was the adaptation of KA on Lie algebra $\mathfrak{su}(1,1)$, from the identification of the following characteristics required by the dynamical algebra [28, 26]:

- To admit an infinite-dimensional irreducible representation that acts on the base of the space of Hilbert associated to the physical referent's Hamiltonian.
- To admit the factorization of the physical referent's Hamiltonian in terms of the algebra's generators.
- To allow the construction of a number operator, where its eigenvectors are the eigenvectors of the physical referent's Hamiltonian, and its eigenvalues are the non-negative integers numbers $\mathbb{N}$.
- To allow the construction of coherent states.

From this algebraic adaptation, KA was adapted to the following physical referents whose dynamical algebra is $\mathfrak{su}(1,1)$: infinite square well [30, 24], Pöschl-Teller potentials [36, 35], generalized Laguerre oscillator, infinite cylindrical, perturbed cylindrical well and Holstein-Primakoff system [28]. On other hand, on strict sense the indicated adaptations are based on algebra $\mathfrak{su}^k(1,1) \equiv \mathfrak{su}(1,1) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{su}(1,1)$, and we are making an adaptation of KA on algebra $su(k,1)$ [27]. Moreover, from an algebra that it interpolates between Weyl-Heisenberg and $\mathfrak{su}(1,1)$ algebras [32], we are making a generalization of KA, where KA and our adaptations on $\mathfrak{su}(1,1)$ are particular cases [25].

The algebraic adaptation made by the authors establishes that the algebraic properties required by KA are not exclusive of the Lie algebra Weyl-Heisenberg and, the adaptations made on some physical referents extend the spectrum of possibilities on which it is possible to consider an implementation of KA.

4. Resumen técnico

4.1. Introducción

El primer modelo de hipercomputación [5, 29] desde la computación cuántica (de acuerdo al conocimiento de los autores) fue propuesto por Tien D. Kieu ([13] y las referencias incluidas), el cual consiste de un algoritmo diseñado para solucionar el décimo problema de Hilbert (DPH) [17]. El problema de investigación propuesto consistió en construir nuevos modelos y algoritmos de hipercomputación sustentados en la computación cuántica. En particular se propusó adaptar el algoritmo de Kieu (AK) a los siguientes referentes físicos: la caja de potencial infinita [2], el oscilador de Laguerre [2], el oscilador de Laguerre generalizado [9] y el rotor cuántico. Para cada uno de estos referentes fueron planteadas hipótesis respecto a cuáles instancias del DPH se podian resolver.

Los resultados obtenidos superaron los objetivos planteados puesto que se determinaron las características necesarias para realizar una adaptación algebraica del AK (independiente de cualquier referente físico). En particular se adaptó el AK al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$, y a partir de esta adaptación se obtuvieron las adaptaciones del AK a los referentes físicos señalados[1]. Además los resultados obtenidos superaron las restricciones impuestas por las hipótesis iniciales, puesto que fue posible adaptar el AK sobre los nuevos referentes físicos sin necesidad de considerar instancias particulares del DPH.

4.2. Algoritmo de Kieu

Una ecuación Diofantina es de la forma

$$D(x_1, \ldots, x_k) = 0, \tag{1}$$

donde D es un polinomio con coeficientes enteros. En la terminología actual el décimo problema de Hilbert puede ser enunciado como: ¿Es posible construir un procedimiento para determinar si una ecuación del tipo (1) tiene o no solución en los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$? A partir de los resultados obtenidos por Matiyasevich, Davis, Robinson y Putnam, es conocido el hecho de la incomputabilidad por una máquina de Turing de este problema [17].

El algoritmo de Kieu (AK) emplea como referente físico el oscilador armónico simple (SHO)[2] el cual tiene como álgebra dinámica asociada el álgebra de Lie Weyl-Heisenberg $\mathfrak{g}_{\text{W–H}}$. La solución al DPH está dada por el hecho de que la ecuación (1) tiene al menos una solución en $\mathbb{N}$ si y sólo si el valor propio asociado al estado fundamental de un cierto Hamiltoniano codificante $H_{\text{D}}^{\text{SHO}}$ es igual a cero. Para hallar este estado fundamental, se emplea la estrategia de la computación cuántica adiábatica [7] partiendo del hecho de que cierto estado inicial, construído a partir de los estados coherentes del SHO, es el estado fundamental de un Hamiltoniano inicial $H_{\text{I}}^{\text{SHO}}$. Para el Hamiltoniano del SHO $H^{\text{SHO}} = (P^2 + X^2)/2 = a^\dagger a + 1/2$, los estados número de ocupación $|\, n\rangle$, la acción de los operadores de creación $a^\dagger$ y aniquilación a generadores del álgebra $\mathfrak{g}_{\text{W–H}}$ sobre los estados de número de ocupación $|\, n\rangle$, las relaciones de conmutación $[a, a^\dagger], [a, a]$ y $[a^\dagger, a^\dagger]$, el operador número de ocupación N^{SHO}, los estados coherentes $|\, \alpha\rangle^{\text{SHO}}$

[1] La excepción a esta afirmación la constituye el rotor cuántico, para el cual no fue posible adaptar el algoritmo de Kieu debido a la naturaleza de su espacio de Hilbert asociado.

[2] Se emplearán algunas siglas en inglés para las abreviaturas, debido a su uso difundido en la literatura.

y la densidad de probabilidad tipo Poisson para la variable aleatoria n, asociada el estado coherente $|\,\alpha\rangle^{\mathrm{SHO}}$, están dados por[3]

$$\mathfrak{F}^{\mathrm{SHO}} = \{|\,n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}, \tag{2a}$$

$$a\,|\,n\rangle = \sqrt{n}\,|\,n-1\rangle\,, a^\dagger\,|\,n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\,n+1\rangle\,, \tag{2b}$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \tag{2c}$$

$$N^{\mathrm{SHO}} = a^\dagger a, \qquad N^{\mathrm{SHO}}\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle\,, \tag{2d}$$

$$|\,\alpha\rangle^{\mathrm{SHO}} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|\,n\rangle\,, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{2e}$$

$$P_n^{\mathrm{SHO}}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \tag{2f}$$

Dada una ecuación Diofantina del tipo (1), y con las características asociadas al SHO, Kieu propusó el siguiente algoritmo cuántico, probabilista e hipercomputacional para resolver el décimo problema de Hilbert [13]:

1. *Construct a physical process in which a system initially starts with a direct product of k coherent states $|\,\psi(0)\rangle$, and in which the system is subject to a time-dependent Hamiltonian $H_{\mathrm{A}}(t)$ over the time interval $[0, T]$, for some finite time T, with the initial Hamiltonian H_{I} and the final Hamiltonian H_{D}, given by*

$$\begin{aligned}
|\,\psi(0)\rangle^{\mathrm{SHO}} &= \bigotimes_{i=1}^{k} |\,\alpha_i\rangle^{\mathrm{SHO}}\,, \\
H_{\mathrm{A}}^{\mathrm{SHO}}(t) &= (1 - t/T) H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{SHO}} + (t/T) H_{\mathrm{D}}^{\mathrm{SHO}}, \\
H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{SHO}} &= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^\dagger - \alpha_i^*\right)(a_i - \alpha_i)\,, \\
H_{\mathrm{D}}^{\mathrm{SHO}} &= \left(D(N_1^{\mathrm{SHO}}, \ldots, N_k^{\mathrm{SHO}})\right)^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

2. *Measure through the time-dependent Schrödinger equation*

$$i\partial_t\,|\,\psi(t)\rangle = H_{\mathrm{A}}(t)\,|\,\psi(t)\rangle\,, \ \textit{for } t \in [0, T],$$

the maximum probability to find the system in a particular number state at the chosen time T,

$$\begin{aligned}
P_{\max}(T) &= \underset{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k}{\text{máx}} |\langle\psi(T) \mid n_1, \ldots, n_k\rangle|^2 \\
&= |\langle\psi(T) \mid n_1, \ldots, n_k\rangle_0|^2\,.
\end{aligned}$$

3. *If $P_{\max}(T) \leq 1/2$, increase T and repeat all the steps above. If $P_{\max}(T) > 1/2$ then $|\,\{n\}\rangle_0 \equiv |\,n_1, \ldots, n_k\rangle_0$ is the ground state of H_{D} (assuming no degeneracy) and we can terminate the algorithm and deduce a conclusion from the fact that $H_{\mathrm{D}}\,|\,\{n\}\rangle_0 = 0$ iff the Diophantine equation of type* (1) *has a solution in* $\mathbb{N}$.

[3]Para todos los operadores de aniquilación A presentados en este resumen se tiene que $A\,|\,0\rangle = 0$, por lo tanto esta ecuación se omite en las acciones del tipo (2b).

Antes de presentar las adaptaciones realizadas es necesario indicar que un malentendido frecuente es no hacer distinción entre la computación cuántica adiabática sobre espacios finito e infinito-dimensionales. La reciente demostración de que la computación cuántica adiabática es computacionalmente equivalente a la computación cuántica estándar [1], no genera contradicción con el AK ni con las adaptaciones llevadas a cabo por los autores, pues esta demostración es sólo válida para el caso finito-dimensional. Además, aunque el AK ha generado bastante controversia, hasta ahora no se han presentado argumentos concluyentes que lo refuten ([13, 15, 14, 16] y las referencias incluidas).

4.3. Adaptación algebraica del algoritmo de Kieu al álgebra dinámica $\mathfrak{su}(1,1)$

Un análisis detallado del AK refleja que sus características de hipercomutación subyacen en el álgebra dinámica asociada al referente físico empleado, y en la posibilidad de una evolución adiabática establecida entre ciertos Hamiltonianos no acotados [3]. Las características del algebra dinámica son señaladas por el cuadro 1.

Cuadro 1: Características algebraicas requeridas para la adaptación del AK.

1. Admitir una representación infinita-dimensional irreducible que actua sobre la base del espacio de Hilbert asociado al Hamiltoniano del referente físico.
2. Admitir la factorización del Hamiltoniano del referente físico en términos de los generadores del álgebra.
3. Permitir la construcción de un operador número tal que sus autovectores sean los autovectores del Hamiltoniano asociado al referente físico y sus autovalores sean los números naturales $\mathbb{N}$.
4. Permitir la construcción de estados coherentes.

Debido a que estas características no son exclusivas del álgebra $\mathfrak{g}_{\text{W–H}}$, es posible realizar una adaptación del AK sobre un álgebra diferente que las satisfaga. Se presenta entonces un algoritmo *à la* Kieu construido sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ [28, 26]. La selección de esta álgebra está sustentada en el hecho que ella admite realizaciones en diferentes sistemas cuánticos, por ejemplo: en la óptica cuántica, en sistemas de uno, dos o cuatros modos o sistemas tales como el Holstein-Primakoff; en el campo de la materia condensada, en la caja de potencial infinita, los potenciales Pöschl-Teller y los potenciales Calogero-Sutherland y desde la física matemática en osciladores Laguerre, Legendre, Chebyshev y Meixner.
El álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ es definida por las relaciones de conmutación

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \qquad [K_+, K_-] = -2K_0. \tag{4}$$

En contraste con el álgebra $\mathfrak{g}_{\text{W–H}}$, el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ admite diferentes tipos de estados coherentes y diferentes representaciones infinito-dimensionales irreducibles unitarias (UIRs). La infinito-dimensional UIR discreta positiva está dada por [8, 37]

$$\begin{aligned}
K_- \,|\, k, n\rangle &= \sqrt{n(2k+n-1)}\,|\, k, n-1\rangle\,,\\
K_+ \,|\, k, n\rangle &= \sqrt{(n+1)(2k+n)}\,|\, k, n+1\rangle\,,\\
K_0 \,|\, k, n\rangle &= (n+k)\,|\, k, n\rangle\,,
\end{aligned}$$

donde $|\,k,n\rangle$ ($n \in \mathbb{N}$) es la base normalizada y k es el índice Bargmann que etiqueta la UIR. Se introduce el operador número $N^{\mathfrak{su}(1,1)}$ por

$$N^{\mathfrak{su}(1,1)} = K_0 - k, \qquad N^{\mathfrak{su}(1,1)}\,|\,k,n\rangle = n\,|\,k,n\rangle\,, \tag{5}$$

y se definen los estados coherentes Barut-Girardello (BG) por $K_-\,|\,k,\alpha\rangle_{BG} = \alpha\,|\,k,\alpha\rangle_{BG}$, los cuales pueden ser expresados como [37]

$$|\,k,\alpha\rangle_{BG} = \sqrt{\frac{|\alpha|^{2k-1}}{I_{2k-1}(2|\alpha|)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!\Gamma(n+2k)}}\,|\,k,n\rangle\,, \tag{6}$$

donde $I_\nu(x)$ es la función modificada de Bessel de primera clase.
Ahora se introduce una generalización de (4)-(6). Asumiendo la existencia de un sistema cuántico S cuya álgebra dinámica sea $\mathfrak{su}(1,1)$, las ecs. (7) establecen la adaptación de las ecs. (2) al álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$. La ec. (7a) define el espacio de Fock de los estados cuánticos del sistema S. La ec. (7b) presenta las relaciones de conmutación que definen el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$. La ec. (7c) muestra la acción de la infinito-dimensional UIR de $\mathfrak{su}(1,1)$ sobre el espacio $\mathfrak{F}^{\mathrm{S}}$, con una función característica f^{S} la cual es asumida como una función cuadrática de n. La ec. (7d) muestra la ecuación del espectro de energía para el sistema cuántico S y la ec. (7e) presenta la forma factorizada del Hamiltoniano H^{S} en términos de los operadores escalera. La ec. (7f) define el operador número asociado al sistema S y su correspondiente acción sobre el espacio $\mathfrak{F}^{\mathrm{S}}$. La ec. (7g) es la definición de un estado coherente no lineal denotado $|\,z\rangle$ el cual corresponde a una generalización de los estados coherentes BG y Klauder-Perelomov [37, 38], y (7h) presenta la forma de este estado coherente no lineal. La ec. (7i) presenta la densidad de probabilidad para la variable aleatoria n, la cual es asociada al estado coherente (7h).

$$\mathfrak{F}^{\mathrm{S}} = \{|\,n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}, \tag{7a}$$

$$[K_-^{\mathrm{S}}, K_+^{\mathrm{S}}] = K_3^{\mathrm{S}}, [K_-^{\mathrm{S}}, K_3^{\mathrm{S}}] = 2K_-^{\mathrm{S}}, [K_+^{\mathrm{S}}, K_3^{\mathrm{S}}] = -2K_+^{\mathrm{S}}, \tag{7b}$$

$$\begin{aligned} K_-^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle &= \sqrt{f^{\mathrm{S}}(n)}\,|\,n-1\rangle\,,\\ K_+^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle &= \sqrt{f^{\mathrm{S}}(n+1)}\,|\,n+1\rangle\,,\\ K_3^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle &= \left(f^{\mathrm{S}}(n+1) - f^{\mathrm{S}}(n)\right)|\,n\rangle\,, \end{aligned} \tag{7c}$$

$$H^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle = E_n^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle\,, \tag{7d}$$

$$H^{\mathrm{S}} = \hbar\omega(K_+^{\mathrm{S}}K_-^{\mathrm{S}}), \text{ con } K_+^{\mathrm{S}}K_-^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle = f^{\mathrm{S}}(n)\,|\,n\rangle\,, \tag{7e}$$

$$N^{\mathrm{S}} = \left(f^{\mathrm{S}}\left(H^{\mathrm{S}}\right)\right)^{-1}, \text{ donde } N^{\mathrm{S}}\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle\,, \tag{7f}$$

$$h^{\mathrm{S}}(N^{\mathrm{S}})K_-^{\mathrm{S}}\,|\,z\rangle^{\mathrm{S}} = z\,|\,z\rangle^{\mathrm{S}}\,, z \in \mathbb{C}, \tag{7g}$$

$$|\,z\rangle^{\mathrm{S}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|z|^{2m}}{B(m)^2C(m)}\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{B(n)\sqrt{C(n)}}, \tag{7h}$$

$$P_n^{\mathrm{S}}(z) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|z|^{2m}}{B(m)^2C(m)}\right)^{-1}\frac{|z|^{2n}}{B(n)^2C(n)}, \tag{7i}$$

donde $B(p) = \prod_{j=0}^{p-1} h^{\mathrm{S}}(j)$ y $C(p) = f^{\mathrm{S}}(p)!$.
A partir de las ecs. (7), la adaptación del AK sobre el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ está dada por reemplazar los elementos en (3) por los siguientes elementos

$$\begin{aligned}
\mid \psi 0\rangle^{\mathrm{S}} &= \bigotimes_{i=1}^{k} \mid z_i\rangle^{\mathrm{S}} , \\
H_A^{\mathrm{S}}(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_I^{\mathrm{S}} + \frac{t}{T} H_D^{\mathrm{S}}, \\
H_I^{\mathrm{S}} &= \sum_{i=1}^{k} \left(K_{+_i}^{\mathrm{S}} h^{\mathrm{S}}(N^{\mathrm{S}}) - z_i^*\right) \left(h^{\mathrm{S}}(N^{\mathrm{S}}) K_{-_i}^{\mathrm{S}} - z_i\right) , \\
H_D^{\mathrm{S}} &= \left(D\left(N_1^{\mathrm{S}}, \ldots, N_k^{\mathrm{S}}\right)\right)^2 .
\end{aligned} \tag{8}$$

4.4. Adaptación del algoritmo de Kieu sobre algunos referentes físicos

La adaptación algebraica del AK expresada por (8) depende de las formas particulares de las funciones f^{S} y h^{S}. Para cada sistema físico considerado se determina que él constituye una realización del álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$, es decir, se determina que su álgebra dinámica asociada es $\mathfrak{su}(1,1)$, y se establecen los valores particulares de las funciones f^{S} y h^{S}.

4.4.1. Potenciales Pöschl-Teller y caja de potencial infinita

En esta sección se presenta la adaptación del AK sobre los potenciales Pöschl-Teller (PTP) [36, 35] y la caja de potencial infinita (ISW) [30, 24]. Para una partícula de masa m, confinada unidimensional sobre $0 \leq x \leq \pi l$, sujeta a la interacción de una familia de potenciales Pöschl-Teller continuamente indexada por $\lambda, \kappa > 1$, en donde se ha tomado $V_0 = \hbar^2/4ma^2$, el Hamiltoniano H^{PTP} y los niveles de energía E_n^{PTP} son [2]

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{PT}} &= i^2 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{8ml^2} \left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2 x/2} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{\operatorname{sen}^2 x/2} \right) - \\
&\quad \frac{\hbar^2}{8ml^2} (\lambda+\kappa)^2, \\
E_n^{\mathrm{PTP}} &= \hbar\omega^{\mathrm{PTP}} e_n^{\mathrm{PTP}}(\lambda,\kappa),
\end{aligned}$$

donde $\omega^{\mathrm{PTP}} = \hbar/2ml^2$, $e_n^{\mathrm{PTP}}(\lambda,\kappa) = n(n+2\eta-1)$ y $\eta = (\lambda+\kappa+1)/2$. La accción de H^{PTP} sobre el espacio de Fock $\mathfrak{F}^{\mathrm{PTP}} = \{\mid \eta, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ está dada por $H^{\mathrm{PTP}} \mid \eta, n\rangle = E_n^{\mathrm{PTP}} \mid \eta, n\rangle$. Debido a la estructura espectral de los PTP, su álgebra dinámica es $\mathfrak{su}(1,1)$ [2], cuyos generadores son $K_+^{\mathrm{PTP}}, K_-^{\mathrm{PTP}}$ y K_3^{PTP} y su infinito-dimensional UIR sobre el espacio $\mathfrak{F}^{\mathrm{PTP}}$, está dada por

$$\begin{aligned}
K_-^{\mathrm{PTP}} \mid \eta, n\rangle &= \sqrt{n(n+2\eta-1)} \mid \eta, n-1\rangle , \\
K_+^{\mathrm{PTP}} \mid \eta, n\rangle &= \sqrt{(2\eta+n)(n+1)} \mid \eta, n+1\rangle , \\
K_3^{\mathrm{PTP}} \mid \eta, n\rangle &= (\eta+n) \mid \eta, n\rangle .
\end{aligned}$$

Con base en esta representación se obtiene $H^{\mathrm{PTP}} = \hbar\omega^{\mathrm{PTP}} \left(K_+^{\mathrm{PTP}} K_-^{\mathrm{PTP}}\right)$ y se obtiene un nuevo operador número $N^{\mathrm{PTP}} = (1/2)\left(K_3^{\mathrm{PTP}} - \eta\right)$, donde $N^{\mathrm{PTP}} \mid \eta, n\rangle = n \mid \eta, n\rangle$. De otro lado, los estados coherentes BG están dados por

$$| \eta, z\rangle = \Big(\Gamma(\eta)\,|z|^{-(\eta-1)}\,I_{\eta-1}(2\,|z|)\Big)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!\,(\eta)_n}}\,| \eta/2, n\rangle\,,$$

donde $(\eta)_n$ el el símbolo de Pochammer definido como $(\eta)_n = \eta(\eta+1)\cdots(\eta+n-1)$.
Se ha establecido entonces que los PTP satisfacen la estructura algebraica (7) con $f^{\text{PTP}}(n) = e_n^{\text{PTP}}(\lambda, \kappa)$ y $\text{h}^{\text{PTP}}(N^{\text{PTP}}) = \mathbb{I}$. En consecuencia es posible reescribir en términos de los PTP los elementos del AK dados por (8).
Como un caso límite de la adaptación del AK a los potenciales PTP, se obtiene su adaptación a la caja de potencial infinita. La infinito-dimensional UIR del álgebra dinámica $\mathfrak{su}(1,1)$, el espacio de Fock asociado, los operadores de creación y aniquilación, el operador número, y los estados coherentes asociados a la ISW, se obtienen al tomar el valor $\eta = 3/2$, en las expresiones correspondientes a los potenciales PTP.

4.4.2. Oscilador de Laguerre generalizado (GLO)

La adaptación del AK sobre el GLO es de naturaleza diferente a la realizada para los PTP y para la ISW [28]. En este caso se considera un espacio de Hilbert cuyos elementos son las funciones generalizadas de Laguerre. Entonces a partir de la definición de los operadores de creación y aniquilación sobre este espacio, se construye un Hamiltoniano. El sistema representado por este Hamiltoniano se corresponde con el GLO [9].
Los polinomios $L_n^\alpha(x)$ y las funciones generalizadas de Laguerre $\psi_n^\alpha(x)$ están definidos por [9]

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{\alpha+n}),$$
$$\psi_n^\alpha(x) = \sqrt{\frac{n!x^{\alpha+1}e^{-x}}{(n+\alpha)!}}L_n^\alpha(x).$$

Se definen los operadores K_+ y K_- para las funciones generalizadas de Laguerre por medio de

$$\begin{aligned} K_+^{\text{GLO}}\psi_n^\alpha(x) &= \left[-x\tfrac{d}{dx} - \tfrac{2n+\alpha+1-x}{2}\right]\psi_n^\alpha(x) \\ K_-^{\text{GLO}}\psi_n^\alpha(x) &= \left[x\tfrac{d}{dx} - \tfrac{2n+\alpha+1-x}{2}\right]\psi_n^\alpha(x) \end{aligned}$$

Las funciones generalizadas de Laguerre son la base de un espacio de Fock donde $\psi_n^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{n!(\alpha+1)_n}}(K_+)^n\psi_0^\alpha(x)$. La relación de conmutación entre los operadores escalera está dada por$[K_-^{\text{GLO}}, K_+^{\text{GLO}}]\psi_n^\alpha(x) = (2n+\alpha+1)\psi_n^\alpha(x)$. Se define el operador K_3^{GLO} por

$$K_3^{\text{GLO}}\psi_n^\alpha(x) = 1/2(2n+\alpha+1)\psi_n^\alpha(x),$$

y las relaciones de conmutación son

$$[K_-^{\text{GLO}}, K_+^{\text{GLO}}] = 2K_3^{\text{GLO}},$$
$$[K_3^{\text{GLO}}, K_+^{\text{GLO}}] = K_{+^{\text{GLO}}},$$
$$[K_3^{\text{GLO}}, K_-^{\text{GLO}}] = -K_-^{\text{GLO}},$$

de donde se concluye que el GLO realiza una infinito-dimensional UIR del álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$. El Hamiltoniano para el GLO es

$$H^{\mathrm{GLO}}\psi_n^\alpha(x) = K_+^{\mathrm{GLO}} K_-^{\mathrm{GLO}} \psi_n^\alpha(x) = n(n+\alpha)\psi_n^\alpha(x),$$

y los estados BG son

$$|\, z\rangle^{\mathrm{GLO}} = \frac{|z|^{\alpha/2}}{\sqrt{I_\alpha(2|z|)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!(n+\alpha)!}} \,|\, n\rangle \,,$$

donde $|\, n\rangle = \psi_n^\alpha(x)$.
Para $f(n) = n(n+\alpha)$ y $h(n) = 1$, el GLO satisface la estructura algebraica (7) y entonces es posible también reescribir en términos del GLO los elementos del AK dados por (8).

4.5. Otros resultados obtenidos

- Se realizó una adaptación del AK sobre el sistema Holstein-Primakoff [28].

- Se estableció que el cilindro de potencial infinito y el cilindro de potencial infinito modificado tienen como álgebra dinámica asociada el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$. Con base en este hecho, se realizó una adaptación del AK sobre estos referentes físicos [28].

- Todas las adaptaciones realizadas (incluyendo las recién mencionas) son adaptaciones en sentido estrico basadas en el algebra $\mathfrak{su}^k(1,1) \equiv \mathfrak{su}(1,1)\otimes\cdots\otimes\mathfrak{su}(1,1)$. Se está realizando además una adaptación del algoritmo Kieu sobre el álgebra $su(k,1)$, donde el valor de k está dado por el número de incógnitas de la ecuación Diofantina (1) [27].

- Recientemente se presentó un algebra que interpola entre las álgebras Weyl-Heisenberg y $\mathfrak{su}(1,1)$ [32]. Con base en esta álgebra se está realizando una adaptación algebraica del AK, que contiene como casos particulares el AK y las adaptaciones realizadas por los autores [25].

4.6. Conclusiones

- Se obtuvo una adaptación algebraica del algoritmo de Kieu sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$. Esta adaptación al ser independiente del referente físico empleado, constituye una ampliación de los objetivos planteados en el proyecto de investigación, los cuales consistieron en realizar una adaptación del algoritmo de Kieu sobre algunos referentes físicos concretos.

- Desde un punto de vista algebraico se han identificado las condiciones requeridas para realizar una adaptación del algoritmo de Kieu. Por lo tanto, el algoritmo de Kieu no depende de ninguna característica fundamental del oscilador armónico simple ni de su álgebra dinámica $\mathfrak{g}_{\text{W-H}}$ y sobre cualquier álgebra dinámica que satisfaga las características enunciadas en el cuadro 1, es posible en principio considerar una adaptación de este algoritmo.

- Se realizaron adaptaciones del AK sobre los siguientes referentes físicos: potenciales Pöschl-Teller, caja de potencial infinita, oscilador de Laguerre generalizado, sistema Holstein-Primakoff, cilindro de potencial infinito y el cilindro de potencial infinito modificado. Las adaptaciones realizadas amplian el espectro de posibilidades sobre el cual es posible considerar una implementación del algoritmo de Kieu.

- La hipercomputación teórica existe como lo evidencian los diferentes modelos propuestos y las adaptaciones realizadas por los autores. La posibilidad de implementar alguno de estos modelos es un problema abierto. La diferencia establecida por la hipercomputación entre los términos 'computable' y 'computable por una máquina de Turing' produce una ruptura con el paradigma establecido. La concreción de esta ruptura a partir de la implementación de un modelo de hipercomputación eficiente, tendría consecuencias de mayor alcance tanto a nivel teórico como como a nivel práctico, que las generadas por los resultados de incomputabilidad obtenidos para las máquinas de Turing.

5. Cuadro de resultados de generación conocimiento

Además de los resultados señalados en el cuadro 2, durante la elaboración del proyecto de investigación se obtuvieron otros resultados de generación de conocimiento no comprometidos contractualmente. Estos resultados son presentados en el cuadro 3.

Cuadro 2: Resultados de conocimiento comprometidos contractualmente

Objetivos	**Resultados esperados**	**Resultados obtenidos**	**Indicador**	**Observaciones**
Objetivo general	Construir nuevos modelos de hipercomputación sustentados en la computación cuántica.	Se construyó un algoritmo de hipercomputación sobre al álgebra dinámica $\mathfrak{su}(1,1)$, a partir de una adaptación del algoritmo de Kieu.	Referencia [26].	El artículo se encuentra en el anexo.
Objetivo general	Construcción de un nuevo modelo de hipercomputación sobre un referente físico diferente al empleado por Kieu.	Se construyeron algoritmo *à la* Kieu sobre los siguientes referentes físicos: caja de potencial infinita, caja de potencial cilíndríca infinita, caja de potencial perturbada, potenciales Pöschl-Teller, sistema Holstein-Primakoff y al oscilador generalizado de Laguerre.	Referencia [28].	El artículo se encuentra en el anexo.

Cuadro 3: Resultados de conocimiento no comprometidos contractualmente

Objetivos	**Resultados esperados**	**Resultados obtenidos**	**Indicador**	**Observaciones**
Objetivo general	Construcción de un nuevo modelo de hipercomputación sobre un referente físico diferente al empleado por Kieu.	Se construyó un algoritmo *à la* Kieu sobre los potenciales Pöschl-Teller.	Referencia [36].	Este artículo fue el resultado de la ponencia realizada en el XXI Congreso Nacional de Física. El artículo se encuentra en el anexo.
Objetivo general	Construcción de un nuevo modelo de hipercomputación sobre un referente físico diferente al empleado por Kieu.	Se construyó un algoritmo *à la* Kieu sobre los potenciales Pöschl-Teller y a la caja de potencial infinita.	Referencia [35].	Este artículo es una versión extensa del artículo anterior. El artículo se encuentra en los .

6. Cuadros de otros resultados

Además de los resultados señalados en el cuadro 4, durante la elaboración del proyecto de investigación se obtuvieron otros resultados no comprometidos contractualmente. Estos resultados son presentados en el cuadro 5.

Cuadro 4: Otros resultados comprometidos contractualmente

Otros resultados	**Compromiso adquirido**	**Logros**
Formación de recursos humanos	Una tesis de maestría	Se realizó la tesis de maestría [19], dirigida por Mario Elkin Vélez Ruiz y co-dirigida por Juan Fernando Ospina Giraldo.
Otros	Una pasantía internacional	El profesor Andrés Sicard Ramírez visitó al profesor Tien D. Kieu en el *Centre for Atomic Optics and Ultrafast Spectroscopy (CAOUS), Swinburne University of Technology*, Melbourne, Australia (ver anexo A.1).

Cuadro 5: Otros resultados no comprometidos contractualmente

Otros resultados	Logros
Formación de recursos humanos	Se realizó la monografía [22], dirigida por Andrés Sicard Ramírez. Esta monografía obtuvo mención de honor.
Cursos organizados por el grupo relacionados con el proyecto	Se ofreció el seminario [31], el cual contó con la participación de 10 estudiantes.
Participación en eventos científicos internacionales	Se presentaron las siguientes ponencias internacionales [24, 30]. Estas ponencias se encuentran en el anexo.
Participación en eventos científicos nacionales	Se presentaron las siguientes ponencias nacionales [21, 23, 18, 34].
Artículos en preparación	[25, 27]

7. Descripción del impacto actual o potencial de los resultados de la investigación

La computación cuántica es una área de investigación muy activa a nivel internacional, lo cual está sustentado en la existencia de más de 150 de grupos de investigación, varias revistas especializadas en el área y la realización de una extensa lista de conferencias, *workshops* y escuelas de verano[4]. A nivel nacional existen por lo menos 6 grupos de investigación (tres de ellos en la categoría A) de acuerdo a la información consignada en GrupLAC. En relación con el área de hipercomputación, está se encuentra en proceso de consolidación a nivel internacional como es indicado por la realización de algunas conferencias, la publicación de algunos números monográficos y la existencia de una red temática[5].
Los resultados del proyecto de investigación están vinculados con la consolidación de nuestro grupo de investigación y con su presencia en la comunidad científica nacional e internacional. El proyecto responde al objetivo general del Programa Nacional de Ciencias Básicas de COLCIENCIAS[6]: **Fortalecer la investigación fundamental, como pilar de los procesos de transformación científicos y tecnológicos del país**. En particular, el impacto actual o potencial de los resultados de la investigación son presentados de acuerdo a su relación con algunos de los objetivos específicos del Programa Nacional de Ciencias Básicas:

Objetivo específico: Promover la producción de conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales.

[4]Veáse `www.qubit.org/phpscripts/places.php` para un listado de los grupos de investigación. Algunas revistas especializadas son el *International Journal of Quantum Computation* y el *Quantum Information Processing*. Veáse `qubit.chem.utoronto.ca/qc-conferences.html` para un listado actualizado de eventos.

[5]Conferencias: *The Hypercomputation Workshop* (`www.alanturing.net/turing_archive/conference/hyper/hypercom.html`); *Beyond the Classical Boundaries of Computation*, sesión de la *American Mathematical Society Meeting* (`www.ams.org/notices/200305/sanfran-prog.pdf`). Números monográficos: Vols. 12(4) y 13(1) de *Mind and Machines*; Vol. 317 de *Theoretical Computer Science*. Red temática: *Hypercomputation Research Network* (`www.hypercomputation.net`).

[6]El objetivo general y los objetivos específicos fueron tomados de `www.colciencias.gov.co/programas/basicas/index.html`.

Los resultados obtenidos en el proyecto de investigación han sido publicados en una revista internacional indexada [28], dos revistas nacionales indexadas [26, 36] y una revista nacional [35]. Los resultados han sido presentados en dos ponencias internacionales [24, 30] y en cinco ponencias nacionales [36, 21, 23, 18, 34]. Además se está en preparación de dos artículos los cuales se espera someter a publicación [27, 25]. Los artículos y las ponencias internacionales se encuentran en el anexo.

Objetivo específico: Promover la participación de la comunidad académica nacional en la cooperación científica y tecnológica internacional.

El grupo trabaja en un área activa de investigación liderada mundialmente por el prof. Tien Kieu. Como resultado de la pasantía realizada al *Centre for Atomic Optics and Ultrafast Spectroscopy (CAOUS), Swinburne University of Technology*, Melbourne, Australia se han fortalecido nuestros contactos académicos y personales con él. Como indicador verificable de esta situación, se menciona que el profesor Kieu ha citado nuestros trabajos en algunas publicaciones y pre-prints internacionales [11, 12, 10, 13] y ha agradecido explícitamente nuestra colaboración en la elaboración de sus artículos [13, 14]. El profesor Kieu se mostró interesado en la posibilidad de realizar un proyecto de investigación en conjunto y se espera que esta posibilidad pueda concretarse en el corto plazo. Por otra parte, el grupo ha alcanzado cierta visibilidad internacional como lo demuestra que uno de sus integrantes fue evaluador de un artículo (en el área de este proyecto de investigación) para la prestigiosa revista *Theoretical Computer Science*.

Objetivo específico: Contribuir a la formación de personal calificado para investigación en Ciencias Básicas.

En el contexto del desarrollo del proyecto de investigación se realizó una tesis de maestría [19] y se realizó una monografía, la cual recibió una mención de honor [22].

Objetivo específico: Promover la creación y consolidación de redes temáticas nacionales e internacionales con la participación de investigadores nacionales.

Si bien en el país no existe una red temática en el área de computación cuántica, el grupo ha participado activamente en algunas de las actividades relacionadas con esta área realizadas en el país. En particular, se presentaron ponencias (una de ellas en calidad de conferencista invitado) en el Encuentro Nacional de Computación e Información Cuántica (CIC 2005) [23, 18] y en el Ciclo de conferencias sobre información en mecánica cuántica, organizado por la Universidad de Antioquia [34].

Objetivo específico: Apoyar la creación y consolidación de los programas de pregrado y postgrado en Ciencias Básicas.

Como resultado de éste y otros proyectos de investigación, el grupo ha ofrecido una línea de enfásis en Lógica y Computación para la maestría en Matemáticas Aplicadas, de la universidad EAFIT. Además, como resultado directo de este proyecto, se ofreció un seminario al interior de esta maestría [31].

Objetivo específico: Promover el trabajo colaborativo en investigación en Ciencias Básicas a nivel multidisciplinario e interinstitucional.

Los resultados obtenidos del proyecto han sido alcanzados debido a la naturaleza multidisciplinaria (física-matemática-ciencias de la computación) del equipo de trabajo.

Objetivo específico: Fomentar y apoyar el desarrollo de proyectos de investigación en Ciencias Básicas.

Los resultados obtenidos han generados nuevos interrogantes y problemas los cuales se espera puedan ser concretados en nuevos proyectos de investigación.

A. Anexos

A.1. Resumen actividades realizadas durante una pasantía internacional

Como fue señalado en el cuadro de otros resultados comprometidos contractualmente (cuadro 4), se realizó una pasantía internacional al interior del proyecto de investigación. Durante el mes de noviembre del año 2004, el profesor Andrés Sicard (investigador principal del proyecto) visitó al profesor Tien D. Kieu en el *Centre for Atomic Optics and Ultrafast Spectroscopy (CAOUS)*, en la *Swinburne University of Technology*, Melbourne, Australia. Como fue señalado en la sección (4) de este informe técnico de investigación, el profesor Kieu es el autor del modelo de hipercomputación desde la computación cuántica, que fue empleado como punto de referencia para las adaptaciones realizadas en este proyecto de investigación.

Las actividades realizadas durante la pasantía fueron las siguientes:

1. La primera actividad académica realizada fue la presentación del profesor Kieu de su modelo de hipercomputación. Es innecesario mencionar la enorme diferencia que existe entre estudiar un resultado a partir de un artículo científico a conocer de primera mano dicho resultado. Esta primera actividad permitió conocer las motivaciones, intuiciones y problemas relacionados con la construcción del algoritmo de hipercomputación de Kieu. Además, permitió esclarecer algunas cuestiones y malentendidos respecto a este modelo de hipercomputación.

2. Se presentó al profesor Kieu la adaptación de su algoritmo a la caja de potencial infinita. Los resultados de esta primera adaptación fueron presentados en dos ponencias internacionales, las cuales contarón con algunas lecturas previas y retroalimentación por parte del profesor Kieu.

3. La discusión de nuevos problemas de investigación fue una de las actividad académicas más importantes realizadas durante la pasantía. En particular se discutieron los siguientes problemas:

    a) En sentido estricto, la computación cuántica produce una posibilidad de hipercomputación "débil", debido a que ésta puede generar verdaderos números aleatorios. De hecho, ésta es una de las tareas que señala Deutsch que puede realizar una máquina de Turing cuántica que no puede realizar una máquina de Turing. Problema: ¿Cómo usar la generación de verdaderos números aleatorios para computar funciones no computables por una máquina de Turing?

    b) Debido a la dificultad de encontrar el estado fundamental asociado al Hamiltoniano H_{D} que codifica la ecuación Diofantina $D(x_1, \ldots, x_k) = 0$, en el algoritmo de hipercomputación de Kieu y en nuestras adaptaciones, se emplea la estrategía de una evolución adiabática a partir de un Hamiltoniano inicial H_{I} con un estado fundamental inicial conocido. Problema: ¿Es posibler aplicar esta misma estrategia para el problema de hallar el mínimo global de una función dada?

c) En las simulaciones del algoritmo de hipercomputación realizadas por el profesor Kieu y en las simulaciones de nuestra adaptación, es claro que éstas no pueden resolver el problema de determinar si una ecuación Diofantina no tiene solución, debido a la imposiblidad de contar con una cantidad no acotada de estados. Problema: ¿Será posible a partir de la simulación del comportamiento del algoritmo para un número finito pero grande de estados, extrapolar su comportamiento para un número no acotado de estados?

4. El profesor Kieu presentó los resultados obtenidos en relación con el problema de la parada de una máquina de Turing cuántica universal.

5. Se discutieron algunas posibles relaciones entre la *Algorithmic Information Theory (AIT)* propuesta por Chaitin y los estados enredados.

Es importante señalar que como resultado de esta pasantía la relación personal y académica con el profesor Kieu se ha fortalecido. Este fortalecimiento ha traído un beneficio inmediato a nuestro grupo de investigación, debido a su liderazgo a nivel internacional en el área de la hipercomputación desde la computación cuántica.

A.2. Artículos publicados y ponencias internacionales

Se anexan los artículos publicados[28, 26, 36, 35] y las ponencias internacionales realizadas [24, 30].

Referencias

[1] Dorit Aharonov et al. Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation. En "Proc. of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'04)", páginas 42–51. IEEE Computer Society Press (2004). 10

[2] J. P. Antoine et al. Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl-Teller potentials. *J. Math. Phys.* **42**(6), 2349–2387 (2001). 8, 12

[3] J. E. Avron y A. Elgart. Adiabatic theorem without a gap condition. *Commun. Math. Phys.* **203**(2), 444–463 (1999). 6, 7, 10

[4] Isaac L. Chuang y Michael A. Nielsen. "Quantum Computation and Quantum Information". Cambridge University Press (2000). 5

[5] B. Jack Copeland. Hypercomputation. *Minds and Machines* **12**, 461–502 (2002). 5, 6, 7, 8

[6] B. Jack Copeland y Diane Proudfoot. Alan Turing's forgotten ideas in computer science. *Scientific American* **280**(4), 76–81 (april 1999). 5

[7] Edward Farhi et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of NP-complete problem. *Science* **292**, 472–476 (2001). 8

[8] Hong-Shen Fu y Ryu Sasaki. Exponential and Laguerre squeezed states for $su(1,1)$ algebra and the Calogero-Sutherland model. *Phys. Rev. A* **53**(6), 3836–3844 (1996). 10

[9] Ahmed Jellal. Coherent states for generalized Laguerre functions. *Mod. Phys. Lett. A* **17**(11), 671–682 (2002). 8, 13

[10] Tien D. Kieu. Quantum adiabatic algorithm for Hilbert's tenth problem: I. The algorithm. Eprint: `http://arXiv.org/abs/quant-ph/0310052` v2 (2003). 18

[11] Tien D. Kieu. An anatomy of a quantum adiabatic algorithm that transcends the Turing computability. *International Journal of Quantum Computation* **3**(1), 177–182 (2005). 18

[12] Tien D. Kieu. Hypercomputability in quantum mechanics. En S. Barry Cooper, Benedikt Löwe y Leen Torenvliet, editores, "Local proceedings of CiE 2005: New Computational Paradigms", tomo X-2005-01 de "Technical Notes", páginas 117–120. Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam (2005). 18

[13] Tien D. Kieu. Hypercomputability of quantum adiabatic processes: Fact versus prejudices. Preprint: `http://arXiv.org/abs/quant-ph/0504101` (2005). 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18

[14] Tien D. Kieu. A mathematical proof for a ground-state identification criterion. Preprint: `http://arXiv.org/abs/quant-ph/0602146` v2 (2006). 10, 18

[15] Tien D. Kieu. On the identification of the ground state based on occupation probabilities: An investigation of Smith's apparent counterexample. Preprint: `http://arXiv.org/abs/quant-ph/0602145` (2006). 10

[16] Tien D. Kieu. Reply to Andrew Hodges. Preprint: `http://arXiv.org/abs/quant-ph/0602214` v2 (2006). 10

[17] Yuri V. Matiyasevich. "Hilbert's tenth problem". The MIT Press (1993). 5, 6, 7, 8

[18] José G. Molina. La representación ∞-dimensional del álgebra dinámica $\mathfrak{su}(1,1)$ de la caja de potencial en la hipercomputación cuántica. II Encuentro Nacional de Computación e Información Cuántica (CIC 2005), Universidad del Cauca, Popayán, 25 al 27 de mayo del 2005 (2005). 17, 18

[19] José Guillermo Molina Vélez. Aplicaciones de las representaciones infinito-dimensionales del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ a la hipercomputación. Tesis de Maestría, Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT (2005). 16, 18

[20] Toby Ord. Hypercomputation: computing more than the Turing machine. Eprint: `http://arXiv.org/abs/math.LO/0209332` (2002). 5

[21] Juan Ospina. Hypercomputation from the infinite square well. En "Memorias X Encuentro ERM", Universidad de Medellín, Medellín (julio 12 al 16 2004). 17, 18

[22] Carlos Arturo Pérez Monsalve. Tipologías para problemas no Turing-computables. Monografía Ingeniería de Sistemas, Universidad EAFIT. 17, 18

[23] Andrés Sicard. Hipercomputación desde la computación cuántica y la tesis de Church-Turing. II Encuentro Nacional de Computación e Información Cuántica (CIC 2005), Universidad del Cauca, Popayán, 25 al 27 de mayo del 2005 (2005). 17, 18

[24] Andrés Sicard, Juan Ospina y Mario Vélez. Numerical simulations of a possible hypercomputational quantum algorithm. En Bernardete Ribeiro et al, editores, "Adaptive and Natural Computing Algorithms. Proc. of the International Conference in Coimbra, Portugal", páginas 272–275, University of Coimbra, Portugal (21st - 23rd March 2005). SpringerWienNewYork. 6, 7, 12, 17, 18, 20

[25] Andrés Sicard, Juan Ospina y Mario Vélez. An algebraic generalization of Kieu's quantum hypercomputational algorithm. En preparación (2006). 6, 7, 14, 17, 18

[26] Andrés Sicard, Juan Ospina y Mario Vélez. Hipercomputación desde la computación cuántica. *Revista Colombiana de Computación* **7**(2), 66–82 (2006). 6, 7, 10, 15, 18, 20

[27] Andrés Sicard, Juan Ospina y Mario Vélez. $\mathfrak{su}(k,1)$ hypercomputing quantum algorithm. En preparación (2006). 6, 7, 14, 17, 18

[28] Andrés Sicard, Juan Ospina y Mario Vélez. Quantum hypercomputation based on the dynamical algebra $su(1,1)$. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(40), 12539–12558 (2006). 6, 7, 10, 13, 14, 15, 18, 20

[29] Andrés Sicard y Mario Vélez. Hipercomputación: La próxima generación de la computación teórica. *Revista Universidad EAFIT* **123**, 47–51 (2001). 5, 6, 7, 8

[30] Andrés Sicard, Mario Vélez y Juan Ospina. A possible hypercomputational quantum algorithm. En E. J. Donkor, A. R. Pirich y H. E. Brandt, editores, "Quantum Information and Computation III", tomo 5815 de "Proc. of SPIE", páginas 219–226. SPIE, Bellingham, WA (2005). 6, 7, 12, 17, 18, 20

[31] Andrés Sicard, Mario Vélez, Juan Ospina y José G. Molina. Representaciones infinito-dimensionales de álgebras de Lie. Seminario en la maestría en Matemáticas Aplicadas, línea de Ánalisis Funcional, Universidad EAFIT. Duración 8 horas. Primer semestre del 2004. 17, 18

[32] S. Sivakumar. Interpolating coherent states for Heisenberg-Weyl and single-photon $SU(1,1)$ algebras. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 6755–6766 (2002). 6, 7, 14

[33] Mike Stannett. Hypercomputation models. En Christof Teuscher, editor, "Alan Turing: life and legaly of a great thinker", páginas 135–157. Berlin: Springer (2003). 5

[34] Mario Vélez. Algoritmo cuántico de hipercomputación. Ciclo de conferencias sobre información en mecánica cuántica. Universidad de Antioquia, 27 de enero del 2006 (2006). 17, 18

[35] Mario Vélez, Andrés Sicard y Juan Ospina. Pöschl-teller potentials based solution to Hilbert's tenth problem. *Ingeniería y Ciencia* **2**(4), 43–57 (2006). 6, 7, 12, 16, 18, 20

[36] Mario Vélez, Andrés Sicard y Juan Ospina. Quantum algorithm of hypercomputation based on the Pöschl-Teller potential. *Revista Colombiana de Física* **38**(1), 313–316 (2006). 6, 7, 12, 16, 18, 20

[37] Xiao-Guang Wang. Coherent states, displaced number states and Laguerre polynomial states for $su(1,1)$ Lie algebra. *Int. J. Mod. Phys. B* **14**(10), 1093–1104 (2000). 10, 11

[38] Xiao-Guang Wang. Two-mode nonlinear coherent states. *Opt. Commun.* **178**(4–6), 365–369 (2000). 11