Computación Paraconsistente
Informe final de investigación (periodo sabático)

Andrés Sicard Ramírez

Grupo Lógica y Computación
Departamento de Ciencias Básicas
Escuela de Ciencias y Humanidades
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia, S.A.
2002

“Quizás no sea una exageración afirmar que las máquinas del futuro serán, básicamente, paraconsistentes. Comentario final de Newton Da Costa y Renato Lewin en [21].

“En otras palabras, si se espera que una máquina sea infalible, no puede ser también inteligente”. Respuesta de Alan Turing a la “objeción matemática” presentada en una conferencia a matemáticos [31, p. 77].

Prefacio

Creemos que con bastante frecuencia los prefacios o proemios, aunque si bien, son el texto inagural de libros y diferentes tipos de informes, son lo último que sus autores escriben. Nuestro caso no es una excepción, y la escritura de este prefacio, nos ha conducido a pensar en la génesis, desarrollo y terminación de nuestro proyecto de investigación titulado "Computación paraconsistente". Aunque hemos de reconocer que la idea nos atrae bastante, hemos decidido no relatar la historia de nuestro proyecto —quizás haya otro espacio y momento para ello—, sólo mencionaremos que fue una historia no lineal, orbitando alrededor de dos grandes atractores opuestos, uno de ellos, de gran regocijo y seguridad, y el otro de ellos, de gran angustia e incertidumbre.

En los últimos años, nuestra actividad académica ha girado entorno a cuatro áreas de intéres: computabilidad, lógicas paraconsistentes, computación cuántica e hipercomputación. Aunque visualizamos una fuerte interrelación entre estas áreas, desafortunadamente, las conexiones entre ellas no han sido establecidas o no son lo suficientemente sólidas —excepción hecha de la conexión "natural" entre computabilidad y computación cuántica, y de las recientes conexiones sugeridas entre hipercomputación y computación cuántica—. Desde la perspectiva de la "interrelación" es que los resultados de este proyecto de investigación, adquieren su mayor importancia. A partir de la *Quantum Computational Logic (**QCL**)* desarrollada por Gianpero Cattaneo, Maria Luisa Dalla Chiara, Roberto Giuntini y Roberto Leporini, hemos demostrado que esta lógica es una lógica paraconsistente (teoremas 2.2, 2.3 y 2.4), y hemos demostrado que a partir de ella, es posible hablar de teorías paraconsistentes en el contexto de la computación (teorema 2.5).

Los contenidos de este informe de investigación son: el primer capítulo presenta el contexto, el problema de investigación, los objetivos de este proyecto de investigación y la modificación de objetivos respecto a la propuesta original de investigación. El segundo capítulo está dividido en tres secciones. La primera, presenta las razones de haber seleccionado el paradigma de la computación cuántica, como paradigma para la construcción de teorías de computación paraconsistentes. La segunda, estable la definición de lógica paraconsistente que será empleada. La tercera, es el núcleo del proyecto de investigación y en ella se demuestran los teoremas 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5, mencionados en el párrafo anterior. El tercer capítulo, presenta las conclusiones del proyecto, en las cuales se mencionan —entre otros aspectos— difererentes problemas abiertos, los cuales pueden ser los puntos de partida a nuevos proyectos de investigación. Finalmente el apéndice A, presenta la *Quantum Computational Logic (**QCL**)*.

Deseamos agradecer a la universidad EAFIT el apoyo y el financiamiento para la realización de este proyecto identificado con el N_0. 817430. Un agradecimiento especial es para el profesor Dr. Jack Copeland y los miembros del departamento de filosofía de la universidad de Canterbury, Nueva Zelandia, por la excelente hospitalidad brindada durante nuestra estadía en su universidad, en el primer semestre del año 2001. Además deseamos agradecer al director del Centro de Investigaciones, Dr. Félix Londoño; al decano de la Facultad de Ciencias y Humanidades, Dr. Mauricio Vélez; al jefe del departamento de Ciencias Básicas, Dra. Martha Cecilia Gómez; a los profesores Juan Carlos Agudelo, Manuel Sierra, Mario Elkin Vélez, Raúl Gómez; a nuestro estudiante Carlos Arturo Pérez; a la secretaria del departamento de Ciencias Básicas, Sra. Nora Patricia Ramírez; y por supuesto a aquelllos que en este momento no recordamos por su colaboración para que este proyecto se llevará a buen término. Finalmente, un agradecimiento diferente es para Andrea Cano, puesto que con ella hemos compartido nuestras angustias y regocijos.

Andrés Sicard
Universidad EAFIT, Medellín
15 de febrero del 2002

Índice general

Capítulo 1

Presentación del proyecto de investigación

1.1 Contexto del problema

1.1.1 Lógicas paraconsistentes

Desde el punto de vista lógico, una teoría Σ se define como un subconjunto de fórmulas bien formadas (FBFs) —llamadas teoremas— obtenidas a partir de la aplicación de reglas de inferencia a un conjunto inicial de axiomas o postulados de la teoría [42]. Una teoría Σ es trivial si el conjunto de sus teoremas es el conjunto de FBFs. Un teoría Σ es no trivial, si al menos una FBF no es un teorema de ella. Una teoría Σ es inconsistente si ella contiene al menos dos teoremas de la forma α y $\neg\alpha$, uno de los cuales es la negación del otro. Un teoría Σ es consistente si no es inconsistente [18, 21, 68].

Si la lógica subyancente a una teoría Σ es la lógica clásica (LC), la distinción entre teoría trivial y teoría inconsistente desaparece. Si por el contrario, la lógica subyancente es una lógica paraconsistente (LP), la distinción entre teoría trivial y teoría inconsistente permanece. Se define entonces una lógica paraconsistente como una lógica subyacente a teorías inconsistentes pero no triviales [18, 21, 68], denominadas teorías paraconsistentes [9].

Existen propuestas de teorías inconsistentes para varias teorías formales, entre ellas, la teoría de conjuntos, el cálculo diferencial, la teoría de categorías y la aritmética [20, 39]. Para esta última existen propuestas inconsistentes sobre lógicas de la relevancia paraconsistentes [37, 39, 44, 45] o sobre lógicas adaptables a las inconsistencias (*inconsistency-adaptative logics*), éstas son lógicas en las cuales algunas reglas de inferencia tienen su aplicación condicionada al buen comportamiento de alguna(s) de sus premisas [2, 63][1].

En general la relación entre una teoría consistente Σ_{LC} sobre una LC y una teoría inconsistente $\Sigma'_{LP} = \Sigma \cup \{\gamma, \neg\gamma\}$[2] sobre una LP, es representada por la figura 1.1.

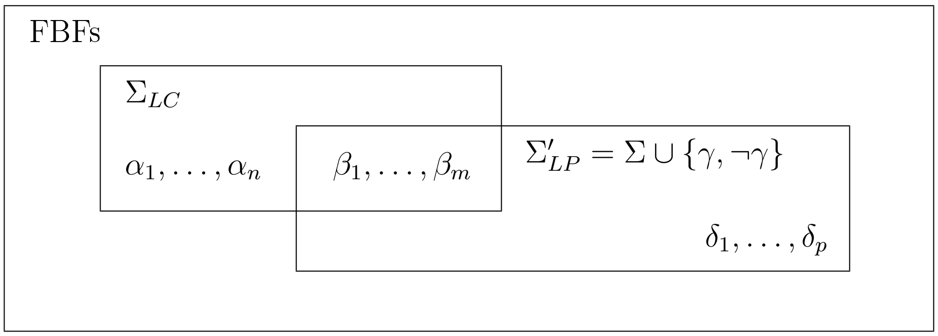


Figura 1.1: Relaciones entre Σ_{LC} y $\Sigma'_{LP} = \Sigma \cup \{\gamma, \neg\gamma\}$.

De acuerdo a la figura 1.1 existen tres situaciones entre ambas teorías: (i) Las fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son teoremas en Σ_{LC}, pero ellas no son teoremas en Σ'_{LP}; (ii) Las fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_m$ son teoremas en Σ_{LC} y en Σ'_{LP}; (iii) Las fórmulas $\delta_1, \ldots, \delta_p$ son teoremas en Σ'_{LP}, pero ellas no son teoremas en Σ_{LC}.

1.1.2 Computación cuántica

Diferentes modelos formales de computación fueron establecidos en la década de los 30, en particular, el modelo denominado "máquina de Turing", construido por Alan Turing en 1936 [62], fue el modelo de computación clásica en el cual se inspiró el primer modelo de computación cuántica denominado "máquina de Turing cuántica", construido por David Deutsch en 1985 [23]. Es decir, hubo la necesidad de esperar cinco décadas para contar con el modelo cuántico; sin embargo, durante este lapso de tiempo fueron establecidos resultados importantes —tales como la computación reversible [5], la computación probabilista [28], la construcción de compuertas universales reversibles [26], etc.— que posibilitaron la construcción del mismo.

[1] Se agradece al profesor Manuel Sierra, la aclaración sobre este tópico.

[2] La teoría Σ'_{LP} no necesariamente se debe obtener a partir de agregar dos postulados de la forma $\{\gamma, \neg\gamma\}$, es posible agregar un postulado α y a partir de él obtener los teoremas $\{\gamma, \neg\gamma\}$. Sin embargo, para efectos de notación se representará la nueva teoría inconsistente como $\Sigma'_{LP} = \Sigma \cup \{\gamma, \neg\gamma\}$. Se agradece al profesor Juan Carlos Agudelo, el realizar esta observación.

A partir de las construcciones y resultados anteriores, se establece la equipotencia entre los diferentes modelos de computación subyacentes, es decir, los modelos de computación clásica, probabilista, reversible o cuántica, computan los mismos objetos Turing-computables [5, 23, 28, 55][3] como lo indica la figura 1.2. Una vez establecido los modelos de computación cuántica —en particular el modelo de "circuitos cuánticos", propuesto por Deutsch en 1989 [24]—, comienza la busqueda de algoritmos y propuestas de implementación para ellos.

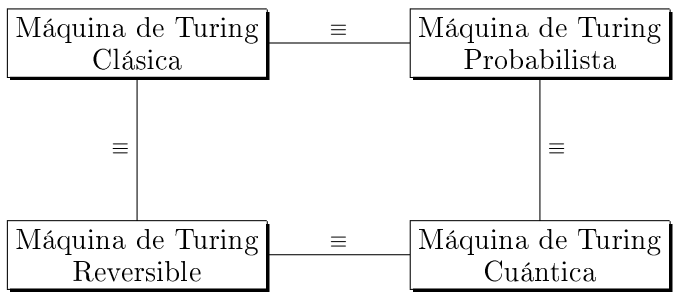


Figura 1.2: Modelos de computación equivalentes.

En relación con los algoritmos cuánticos, quizás no sea exagerado afirmar que fue el algoritmo propuesto por Peter Shor en 1994 [51, 52], quien situó a la computación cuántica en el lugar privilegiado en que hoy se encuentra. La complejidad algorítmica temporal asociada a este algoritmo —diseñado para factorizar un número es sus factores primos—, establece una "ruptura" (exponencial-polinomial) en términos de la complejidad algorítmica con su contraparte clásico. Esta situación establece que —por lo menos desde la perspectiva teórica—, mientras un computador clásico necesita alrededor de $4{,}5 \times 10^{25}$ años para factorizar un número de 1000 dígitos, un computador cuántico para realizar la misma tarea necesita alrededor de 3,07 días, como lo indica la tabla 1.1.

En relación con las propuestas de implementación es necesario mencionar que no

[3]Aunque la anterior afirmación es aceptada actualmente por la comunidad académica, en los últimos meses han surgido un conjunto de propuestas [11, 12, 34, **?**, 33] que analizan la posibilidad de que la computación cuántica compute objetos no Turing-computables, es decir, que la computación cuántica se convierta en un modelo de hipercomputación [17, 56]. Estas propuestas están sustentadas en la posibilidad de que los modelos de computación cuántica "operen" sobre espacios (de Hilbert) infinito dimensionales, en cuyo caso se hablaría de computación cuántica continua [64, 65]. Consideramos que esta idea de hipercomputación sustentada sobre la computación cuántica es bastante fértil y potente, razón por la cual, estamos preparando un proyecto de investigación en esta dirección.

Número de dígitos	Algoritmo clásico[a]	Algoritmo de Shor[b]
129	1,85 años	45,9 minutos
250	$2{,}1 \times 10^6$ años	3,4 horas
1000	$4{,}5 \times 10^{25}$ años	3,07 días

Cuadro 1.1: Comportamiento algoritmo de Shor vs. algoritmo clásico.

[a] La complejidad temporal del mejor algoritmo clásico conocido hasta el momento es $c(x) = \exp\{(\frac{64}{9})^{1/3}(\ln x)^{1/3}(\ln\ln x)^{2/3}\}$ [8, p. 1].

[b] La complejidad temporal del algoritmo de Shor es $c(x) = (\ln x)^2(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)$ [52, p. 1497].

hay consenso sobre la posibilidad o imposibilidad de las mismas debido al fénomeno de la decoherencia para sistema físicos de determinado número de elementos [25]. Sin embargo, un alto porcentaje de la investigación actual en computación cuántica —apoyada por grandes inversiones en dinero tanto gubernamentales como privadas— tiene como objetivo la construcción de máquinas cuánticas. El logro más importante en está dirección —al momento de escribir este informe— es el computador cuántico de cinco qubits construido por IBM y la universidad Stanford [60].

1.1.3 Paraconsistencia y computación cuántica

Respecto a la interrelación entre lógicas paraconsistentes y computación, el único trabajo que conocemos, es un reporte de investigación realizado por Richard Sylvan (fallecido hace pocos años) y Jack Copeland, en el cual sólo se mencionan algunos posibles caminos para la construcción de una lógica paraconsistente de la computación [61]. Por otra lado, Nuel D. Belnap Jr. quien ha trabajado en las área de lógicas relevantes y/o paraconsistentes, ha propuesto una lógica 4-valuada para la computación [4, 3], pero desconocemos si ésta es una lógica paraconsistente.

Respecto a la interrelación entre lógicas paraconsistentes y computación cuántica, aunque los trabajos sobre lógica cuántica —asociadas a la mecánica cuántica, no a la computación cuántica— se remontan a 1936 [6] y aunque en la actualidad existen diversas propuestas sobre lógicas cuánticas [22, 32, 36][4], inclusive algunas de ellas paraconsistentes ([46, sección 3.4], [22, sección 13], [21, p. 193]); la única propuesta sobre una lógica asociada a la computación cuántica que conocemos, es la lógica recientemente propuesta por Gianpero Cattaneo, Maria Luisa Dalla Chiara y otros, denominada *Quantum Computational Logic (**QCL**)* [13], para la cual, la pregunta acerca de su posible paraconsistencia no ha sido considerada.

[4] La referencia [10] presenta más de 40 referencias bibliográficas en relación con las lógicas cuánticas.

1.2 Planteamiento del problema

El problema de investigación propuesto consiste en demostrar la existencia de teorías formales paraconsistentes en el contexto de la computación.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Construir teorías formales en el contexto de la computación que sean teorías paraconsistentes.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Seleccionar un paradigma de computación para construir asociado a él, teorías paraconsistentes.
2. Determinar una lógica asociada al paradigma de la computación seleccionado.
3. Seleccionar una definición de "lógica paraconsistente", adecuada a la lógica y al paradigma de computación seleccionados.
4. Demostrar el carácter de paraconsistencia de la lógica seleccionada.

1.4 Modificación de objetivos

El objetivo general de la propuesta de investigación presentada era: "Construir una teoría de las funciones recursivas parciales paraconsistentes". El cambio del objetivo general entre la propuesta de investigación y el objetivo general presentado en la sección 1.3.1 está sustentado en la elección de un paradigma de computación diferente sobre el cual construir teorías paraconsistentes. Sin embargo, la meta de construir teorías paraconsistentes en el contexto de la computación, no fue modificada.

Debido al cambio de paradigma de computación fue necesario realizar los siguientes cambios respecto a los objetivos específicos de la propuesta:

1. Se adicionó el primer objetivo específico presentado en la sección 1.3.2.
2. Los objetivos específicos de "Estudiar la relación entre la teoría de las funciones recursivas parciales y los sistemas formales de lógica clásica" y de "Seleccionar un substrato formal adecuado para una teoría paraconsistente

de las funciones recursivas parciales" fueron reemplazados por el segundo objetivo específico presentado en la sección 1.3.2, puesto que una vez seleccionado el paradigma de la computación cuántica, era necesario determinar una lógica asociada con él.

3. El objetivo específico de "Construir una inconsistencia al interior de la teoría de las funciones recursivas parciales" fue reemplazado por el cuarto objetivo específico presentado en la sección 1.3.2, puesto que la demostración de la paraconsistencia de la lógica asociada al paradigma de la computación cuántica, permite la construcción de teorías paraconsistentes en este contexto.

4. El objetivo específico de "Estudiar algunos de los sistemas propuestos de aritméticas inconsistentes o algunos de los sistemas propuestos de lógicas adaptables a las inconsistencias" fue reemplazado por el tercer objetivo específico presentado en la sección 1.3.2, puesto que durante el desarrollo del proyecto, quedo claro que no existía una única definición de "lógica paraconsistente".

5. El objetivo específico de "Determinar la característica de hipercomputación o de semi-hipercomputación esperada en una teoría paraconsistente de las funciones recursivas parciales" no fue desarrollado en el contexto del paradigma de la computación cuántica, puesto que en este paradigma las propuestas de hipercomputación están en proceso de gestación y su estudio requiere un proyecto de investigación adicional (cf. nota 3, cap. 1).

Capítulo 2

Computación: teorías paraconsistentes

2.1 Paradigma de computación: computación cuántica

De los diferentes paradigmas de computación tales como las máquinas de Turing [30, 62], las funciones recursivas parciales [30, 35], el λ-calculo [1, 15], las redes neuronales [57, 58] o las máquinas de Post [43], entre otros, es el paradigma de la computación cuántica —establecido en su forma actual por David Deutsch [23, 24]— el más adecuado para una análisis desde el punto de vista de la paraconsistencia, debido a las siguientes razones:

- En la actualidad el área de la computación cuántica es un área de investigación bien establecida y cuenta con varios sitios *web*, publicaciones electrónicas, congresos internacionales y abudantes publicaciones en las más prestigiosas revistas[1].

- Si bien la mecánica cuántica es una teoría factual —a diferencia de ser un teoría formal— existen presentaciones de ella en forma de teoría axiomática [16, 27, 66].

- La existencia de lógicas paraconsistentes cuyo gestación está sustentada en los fenómenos cuánticos ([46, sección 3.4], [22, sección 13], [21, p. 193]).

- La computación cuántica cuenta con dos modelos de computación equivalentes, en cuanto a los objetos que computan: las máquinas de Turing cuánticas y los circuitos cúanticos [29, p. 9]. Cada uno de estos modelos —si

[1] Se menciona en particular el sitio de *Los Alamos*: `xxx.lanl.gov` —sección *Quantum Physics*— en el cual son publicados algunos de los *preprints* más recientes en el área, por otra parte, se mencionan los artículos introductorios [50, 53, 54, 66] y los textos [14, 29, 67], los cuales realizan una presentación completa del tema.

bien equivalentes— ofrecen la posibilidad de formalización desde diferentes teorías matemáticas y/o lógicas.

- Los modelos de computación cuántica son equivalentes, en cuanto a los objetos que computan, al modelo de computación por excelencia, las máquinas de Turing [23][2].

- El cáracter probabilista del valor de la medida de un observable de un sistema cuántico cualquiera, se traduce en un comportamiento, desde el punto de vista de la computación cuántica, que puede ser catalogado como inconsistente.

2.2 Lógicas paraconsistentes: una definición

De forma similar a la computaciín cuántica, en la actualidad el área de lógica paraconsistente es una área de investigación bien establecida, con congresos, publicaciones[3] y demás características de las áreas académicas de cierta trayectoria; inclusive desde 1991 cuenta con el número de clasificación $03B53$ asignado por *Mathematical Reviews*, lo cual le asigna el estatus de ser un área "oficial" de investigación matemática.

Desafortudamente debido a varias dificultades tales como los problemas filosóficos relacionados con el operador de negación o a las posturas de cada una de las diferentes escuelas de lógica paraconsistente, en la actualidad no se cuenta con un único criterio para determinar cuando una lógica es o no paraconsistente. Para efectos de este informe se tomará como criterio, el primer criterio "negativo" presentado por Jean-Yves Béziau, quien recientemente realizó un análisis del problema ¿Qué es una lógica paraconsistente? [9].

Definición 2.1 (Lógica, fórmulas, teorías, relación de consecuencia)**.** Una lógica $\mathcal{L}$ es una estructura $<\mathcal{L},\vdash>$, donde $\mathcal{L}$ es cualquier conjunto de objetos llamados fórmulas, denotados por $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; los conjuntos de fórmulas son llamados teorías, denotados por $\Gamma, \Delta, \dots$, y $\vdash$ es una relación entre teorías y fórmulas llamada relación de consecuencia [9, p. 96].

[2]Aunque no desconocemos las actuales propuestas de modelos de computación más potentes que una máquina de Turing, conocidas como "hipercomputadoras", éstas no serán consideradas en este informe (cf. nota 3, cap. 1).

[3]El texto [46] ofrece un panorama muy completo del estado del área hasta 1990 y el texto [7] es una introducción al tema. Respecto a la "escuela brasileña" —establecida por Newton Da Costa— las siguientes referencias pueden ser un punto de partida [18, 19, 21, 68, 38, 59], y respecto a la "escuela australina" —establecida por Graham Priest, Richard Routley (Sylvan) y otros— lo pueden ser las referencias [40, 41, 48, 47].

La relación de consecuencia $\vdash$ usualmente satisface los siguientes axiomas [9, p. 96]:

Sean α y β dos fórmulas y sean Γ y Δ dos teorías:

1. Reflexividad: Si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.
2. Monotonía: Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \vdash \alpha$.
3. Transitividad: Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Delta, \alpha \vdash \beta$, entonces $\Gamma, \Delta \vdash \beta$.

Definición 2.2 (Dominio de una lógica, conectivos)**.** El dominio de una lógica sentencial es (usualmente) una álgebra libre generada con funciones, llamadas conectivos lógicos, a partir de un conjunto de fórmulas llamadas fórmulas atómicas [9, p. 96].

Definición 2.3 (Negación)**.** Una negación es al menos una función unaria sobre el dominio de una lógica, denotada por $\neg$. Dada la fórmula α, la fórmula $\neg\alpha$ es llamada la negación de α [9, p. 96].

Como afirma Béziau: *"Despite the many divergences among paraconsistentist there is a common agreement to found paraconsistent logic on the rejection of the following principle:"* [9, p. 97]

Principio EC (informal): Desde una contradicción es posible derivar cada cosa (*ex-contradictio sequitur quod libet*).

El principio EC en términos formales puede ser escrito como:

Principio EC (formal): Sean α y β dos fórmulas cualesquiera y sea Γ una teoría cualquiera, entonces $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$.

Definición 2.4 (Lógica paraconsistente)**.** La siguiente definición de lógica paraconsistente está sustentada sobre el rechazo al principio EC.

Sea $\mathcal{L}$ una lógica con una negación $\neg$. Esta negación es paraconsistente, si y sólo si, existe una teoría Γ y existen fórmulas α y β tales que $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$.

Una lógica es paraconsistente, si y sólo si, ella contiene una negación paraconsistente [9, p. 98].

Definición 2.5 (Teoría trivial)**.** Una teoría Γ es trivial si $\Gamma \vdash \alpha$ para toda fórmula α [9, p. 97].

Definición 2.6 (Teoría inconsistente)**.** Sea $\mathcal{L}$ una lógica con una negación $\neg$. Una teoría Γ es inconsistente si existe una fórmula α tal que $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$ [9, p. 98].

Definición 2.7 (Teoría paraconsistente)**.** Sea $\mathcal{L}$ una lógica con una negación $\neg$. Una teoría Γ es paraconsistente si Γ es una teoría inconsistente y Γ es una teoría no trivial [9, p. 98].

2.3 *Quantum computational logic (QCL)*

Como fue mencionado en el contexto del problema de investigación (sección 1.1.3), la lógica **QCL** fue propuesta por Gianpero Cattaneo, Maria Luisa Dalla Chiara y otros [13], y es la única lógica asociada a la computación cuántica que conocemos, en particular ésta es una lógica asociada al modelo de computación cuántica denominado "circuitos cuánticos". El objetivo es entonces demostrar que la lógica **QCL** es una lógica paraconsistente de acuerdo a la definición 2.4.

En lugar de presentar un resumen del trabajo realizado por los autores de la **QCL**, se ha decido anexar este trabajo en el apéndice A. Lo anterior está sustentado en dos razones, la primera es que estos autores presentan los elementos de computación cuántica necesarios para definir la **QCL**, la segunda es que la definición de la **QCL** es una definición elaborada paso a paso, por lo tanto, hubiera sido necesario presentar casi todo el trabajo realizado por ellos. Debido a lo anterior, se establecen las siguientes convenciones: (i) La notación empleada será la misma notación que la empleada en el apéndice A. (ii) Las referencias a teoremas, definiciones o ejemplos del apéndice A, seran precedidas por el prefijo 'ap-' y tendrán la misma numeración con la cual son presentados en éste..

Inicialmente se demuestra el literal (i) del ap-teorema 4.1, para familiarizarce con la notación y las definiciones empleadas.

Teorema 2.1. *$\alpha \models \neg\neg\alpha$ y $\neg\neg\alpha \models \alpha$*[4].

Demostración. (parte $\alpha \models \neg\neg\alpha$)

1. $\alpha \models \neg\neg\alpha$, si y sólo si, para cualquier realización cuántica computacional Qub se tiene que $\alpha \models_{Qub} \neg\neg\alpha$ (ap-definición 4.4).

2. Sea Qub una realización cuántica computacional. Entonces $\alpha \models_{Qub} \neg\neg\alpha$, si y soló si, $\text{Prob}(\alpha) \leq \text{Prob}(\neg\neg\alpha)$ (ap-definición 4.4).

[4] Aunque en la definición de lógica (definición 2.1) se empleo el símbolo '$\vdash$', para denotar la relación de consecuencia, en el contexto de la **QCL**, se empleará el símbolo '$\models$'. Este cambio de notación es debido a que (usualmente) el primer símbolo es empleado cuando la presentación de una lógica es sintáctica, mientras que el segundo símbolo es empleado cuando la presentación es semántica, como es el caso de **QCL**. Tal como afirman los autores de la **QCL**, es un problema abierto la construcción de una presentación sintáctica para esta lógica [13, p. 12].

3. Sea α una fórmula y sea Qub una realización cúantica computacional para α tal que $Qub(\alpha) = |\,\alpha\rangle$[5] (ap-definición 4.1).

4. $|\,\neg\neg\alpha\rangle = \mathtt{NOT}(|\,\neg\alpha\rangle) = \mathtt{NOT}(\mathtt{NOT}(|\,\alpha\rangle))$ (ap-definción 4.1, condición (ii)).

5. Puesto que, $(\mathtt{NOT})(\mathtt{NOT}) = Id$ (matriz identidad), entonces $|\,\alpha\rangle = |\,\neg\neg\alpha\rangle$.

6. Luego, $\text{Prob}(\alpha) = \text{Prob}(\neg\neg\alpha)$. Por lo tanto, $\alpha \models_{Qub} \neg\neg\alpha$ (por ap-definición 4.4).

7. Dado que la realización Qub era cualquier realización cuántica computacional, entonces $\alpha \models \neg\neg\alpha$ (por ap-definición 4.4).

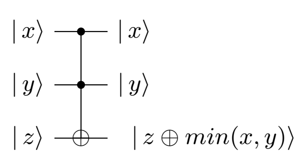
$\square$

Demostración. (parte $\neg\neg\alpha \models \alpha$)
Esta demostración se realiza de forma similar a la anterior. $\square$

La **QCL** tiene los siguientes conectivos lógicos: negación ($\neg$), conjunción ($\curlywedge$), raíz cuadrada de la negación ($\sqrt{\neg}$) y disyunción ($\curlyvee$)[6] . De acuerdo a la definición de negación presentada (definición 2.3) sólo los conectivos $\neg$ y $\sqrt{\neg}$ son candidatos para establecer la paraconsistencia de **QCL**, puesto que ellos son los únicos conectivos unarios.

[5]Para esta demostración no es necesario tener en cuenta la lóngitud de la fórmula α, por esta razón no es necesario espeficar la dimensión del espacio de Hilbert al cual pertence el vector $|\,\alpha\rangle$.

[6]Es posible pensar en la creación de nuevos conectivos lógicos a partir de otras compuertas cuánticas diferentes a las utilizadas para la construcción de los conectivos lógicos de la **QCL**. Sin embargo, debido al hecho de que la compuerta de Toffoli $T^{(1,1,1)}$ (ap-definición 2.3) es una compuerta cuántica universal [29, p. 51], cualquier conectivo lógico construido a partir de cualquier otra compuerta cuántica puede ser construido a partir de ella. A manera de ejemplo, los conectivos lógicos de la **QCL** pueden ser construidos con la compuerta cuántica de Toffoli



puesto que ella satisface la ecuación:

$$|\,z \oplus min(x,y)\rangle = \begin{cases} \mathtt{AND}(|\,x\rangle, |\,y\rangle) & \text{si } |\,z\rangle = |\,0\rangle, \\ \mathtt{NOT}(|\,z\rangle) & \text{si } |\,x\rangle = |\,y\rangle = |\,1\rangle, \\ \sqrt{\mathtt{NOT}}(|\,x\rangle) & \text{si } |\,y\rangle = |\,1\rangle \text{ y } |\,z\rangle = \frac{1}{2}(1+i)\,|\,0\rangle + \frac{1}{2}(1-i)\,|\,1\rangle, \\ |\,x\rangle & \text{si } |\,z\rangle = |\,0\rangle \text{ y } |\,y\rangle = |\,1\rangle. \end{cases}$$

Antes de analizar si los conectivos $\neg$ y $\sqrt{\neg}$ son o no paraconsistentes (definición 2.4), es necesario modificar las definiciones de consecuencia y consecuencia lógica (ap-definición 4.4) para adaptarlas a la manipulación de teorías de más de una fórmula, pues en su versión original sólo es contemplado este caso.

Definición 2.8 (consecuencia y consecuencia lógica (nueva versión))**.** β es una consecuencia de la teoría $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ en la realización cuántica computacional Qub ($\Gamma \models_{Qub} \beta$), si y sólo si, $\text{Prob}(\Gamma) = \text{Prob}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \equiv_{def} \text{Prob}(\alpha_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \alpha_n) \leq \text{Prob}(\beta)$.

β es una consecuencia lógica de la teoría $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ($\Gamma \models \beta$), si y sólo si, para cualquier realización cuántica computacional Qub se tiene que $\Gamma \models_{Qub} \beta$.

Con base en estas nuevas definiciones se demuestra que los conectivos $\neg$ y $\sqrt{\neg}$ son paraconsistentes.

Teorema 2.2. *El conectivo negación ($\neg$) es un conectivo paraconsistente.*

Demostración. Es necesario demostrar que existe una teoría Γ y existen fórmulas α y β tales que $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \not\models \beta$. Es decir, es necesario demostrar que existe una teoría Γ, existen fórmulas α y β y existe por lo menos una realización Qub tal que $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \not\models_{Qub} \beta$; en otras palabras, $\text{Prob}(\Gamma \curlywedge \alpha \curlywedge \neg\alpha) > \text{Prob}(\beta)$, bajo la realización Qub.

1. Sea Γ una teoría formada por una fórmula γ.

2. Sea Qub una realización tal que (ap-definición 4.1):
$$\begin{aligned} Qub(\gamma) &= |\,\gamma\rangle = 1\,|\,1\rangle\,, \\ Qub(\alpha) &= |\,\alpha\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,1\rangle\,, \\ Qub(\beta) &= |\,\beta\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4}\,|\,0\rangle + \frac{1}{4}\,|\,1\rangle\,. \end{aligned}$$

3. $\text{Prob}(\gamma) = 1, \text{Prob}(\alpha) = \frac{1}{2}$ y $\text{Prob}(\beta) = \frac{1}{8}$ (ap-definición 3.1).

4. $|\,\neg\alpha\rangle = \texttt{NOT}(|\,\alpha\rangle) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,1\rangle$ (ap-definición 4.1, condición (ii) y ap-definición 2.7). Luego $\text{Prob}(\neg\alpha) = \text{Prob}(\alpha) = \frac{1}{2}$ (ap-definición 3.1).

5. $|\,\gamma \curlywedge (\alpha \curlywedge \neg\alpha)\rangle = \texttt{AND}(|\,\gamma\rangle\,, \texttt{AND}(|\,\alpha\rangle\,, |\,\neg\alpha\rangle))$[7] (ap-definición 4.1, condición (iii)).

[7] Es independiente seleccionar el vector $|\,\gamma \curlywedge (\alpha \curlywedge \neg\alpha)\rangle$ o el vector $|\,(\gamma \curlywedge \alpha) \curlywedge \neg\alpha\rangle$ dado que el operador $\curlywedge$ es asociativo (ap-teorema 4.1, literal (iv)).

6. $\text{Prob}(\texttt{AND}(|\,\gamma\rangle\,, \texttt{AND}(|\,\alpha\rangle\,, |\,\neg\alpha\rangle))) = \text{Prob}(\gamma) \cdot (\text{Prob}(\alpha) \cdot \text{Prob}(\neg\alpha)) = \frac{1}{4}$ (ap-teorema 3.1, literal (i)).

7. Luego, $\text{Prob}(\Gamma, \alpha, \neg\alpha) \equiv_{def} \text{Prob}(\gamma \curlywedge \alpha \curlywedge \neg\alpha) > \text{Prob}(\beta)$ puesto que $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ (por definición 2.8).

8. Entonces, $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVDash_{Qub} \beta$, por lo tanto, $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVDash \beta$ y el conectivo negación $(\neg)$ es una negación paraconsistente.

$\square$

Teorema 2.3. *El conectivo raíz cuadrada de la negación ($\sqrt{\neg}$) es un conectivo paraconsistente.*

Demostración. En este caso es necesario demostrar que existe una teoría Γ y existen fórmulas α y β tales que $\Gamma, \alpha, \sqrt{\neg}\alpha \nVDash \beta$.

1. Sea Γ una teoría formada por una fórmula γ y sea Qub una realización tal que (ap-definición 4.1):

$$\begin{aligned} Qub(\gamma) &= |\,\gamma\rangle = 1\,|\,1\rangle\,, \\ Qub(\alpha) &= |\,\alpha\rangle = 1\,|\,1\rangle\,, \\ Qub(\beta) &= |\,\beta\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|\,0\rangle + \frac{1}{2}\,|\,1\rangle\,. \end{aligned}$$

2. $\text{Prob}(\gamma) = \text{Prob}(\alpha) = 1$ y $\text{Prob}(\beta) = \frac{1}{4}$ (ap-definición 3.1). Además, $|\,\sqrt{\neg}\alpha\rangle = \dfrac{1}{2}(1-i)\,|\,0\rangle + \dfrac{1}{2}(1+i)\,|\,1\rangle$ (ap-definición 4.1, condición (iv) y ap-definición 2.10). Luego $\text{Prob}(\sqrt{\neg}\alpha) = \frac{1}{2}$ (ap-definición 3.1).

3. $|\,\gamma \curlywedge (\alpha \curlywedge \sqrt{\neg}\alpha)\rangle = \texttt{AND}(|\,\gamma\rangle\,, \texttt{AND}(|\,\alpha\rangle\,, |\,\sqrt{\neg}\alpha\rangle))$ (ap-definición 4.1, condición (iii)) y $\text{Prob}(\texttt{AND}(|\,\gamma\rangle\,, \texttt{AND}(|\,\alpha\rangle\,, |\,\sqrt{\neg}\alpha\rangle))) = \frac{1}{2}$ (ap-teorema 3.1, literal (i)).

4. Luego, $\text{Prob}(\Gamma, \alpha, \sqrt{\neg}\alpha) \equiv_{def} \text{Prob}(\gamma \curlywedge \alpha \curlywedge \sqrt{\neg}\alpha) > \text{Prob}(\beta)$ puesto que $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ (por definición 2.8).

5. Entonces, $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVDash_{Qub} \beta$, por lo tanto, $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVDash \beta$ y el conectivo $\sqrt{\neg}$ es una negación paraconsistente.

$\square$

De acuerdo a la definición 2.4, una lógica es paraconsistente si contiene al menos un operador de negación paraconsistente, por lo tanto:

Teorema 2.4. *La lógica **QCL** es una lógica paraconsistente*[8].

Una de las principales aplicaciones de una lógica paraconsistente es la de ser la lógica subyacente a teorías paraconsistentes. En el contexto en el cual fue desarrollada la lógica **QCL**, las teorías paraconsistentes construídas sobre ella, son teorías paraconsistentes de la computación.

Teorema 2.5. *Sean Γ una teoría y α una fórmula de la **QCL**. Si $\alpha \in \Gamma$ y $\neg\alpha \in \Gamma$, entonces la teoría Γ es una teoría paraconsistente.*

Demostración. De acuerdo a la definición 2.4 es necesario demostrar que Γ es una teoría inconsistente y no trivial. Es necesario suponer que existe una fórmula $\beta \notin \Gamma$, pues de lo contrario Γ sería una teoría trivial. Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \cup \{\alpha, \neg\alpha\}$ y para efectos de simplificar la demostración se supone que las fórmulas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ y α son fórmulas atómicas.

1. Γ es una teoría no trivial.

   (a) Sea Qub una generalización de la realización definida en el teorema 2.2, es decir:

   $$\begin{aligned} Qub(\gamma_1) = \cdots = Qub(\gamma_n) = |\,\gamma_1\rangle = \cdots = |\,\gamma_n\rangle = 1\,|\,1\rangle\,, \\ Qub(\alpha) = |\,\alpha\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,1\rangle\,, \\ Qub(\beta) = |\,\beta\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4}\,|\,0\rangle + \frac{1}{4}\,|\,1\rangle\,. \end{aligned}$$

   (b) $\Gamma \not\models \beta$ (por el teorema 2.2), por lo tanto, Γ es una teoría no trivial.

2. Γ es una teoría inconsistente.

   (a) La demostración de la inconsistencia de Γ se realizará demostrando que $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \neg\alpha$.

   (b) Caso 1: Sea Qub una realización tal que $Qub(\alpha) = 1\,|\,0\rangle$.

      i. $\text{Prob}(\alpha) = 0$ y $\text{Prob}(\neg\alpha) = 1$ (por ap-definición 3.1).

      ii. $\text{Prob}(\Gamma) = \text{Prob}\gamma_1 \cdot \text{Prob}(\gamma_2) \ldots \text{Prob}(\gamma_n) \cdot \text{Prob}(\alpha) \cdot \text{Prob}(\neg\alpha) = 0$ (por ap-definición 3.1, ap-definición 4.1, condición (iii), ap-teorema 3.1, literal (i)).

[8]La **QCL** además de ser una lógica paraconsistente, es una lógica multivaluada, en particular ∞-valuada, puesto que el valor de verdad asociado a una sentencia α está dado por (ap-definición 4.2):

$$\text{Prob}(\alpha) = \text{Prob}(Qub(\alpha)) = \text{Prob}(|\,\alpha\rangle) = \sum_{a_j \in C^+|\,\alpha\rangle} |a_j|^2.$$

.

iii. $\text{Prob}(\Gamma) \leq \text{Prob}(\alpha)$ y $\text{Prob}(\Gamma) \leq \text{Prob}(\neg\alpha)$.

iv. Por lo tanto, $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \neg\alpha$ (por definición 2.8).

(c) Caso 2: Sea Qub una realización tal que $Qub(\alpha) = 1\,|\,1\rangle$. Este caso se demuestra similar al caso anterior.

(d) Caso 3: Sea Qub una realización tal que $Qub(\alpha) = a_0\,|\,0\rangle + a_1\,|\,1\rangle$ y a_0 y a_1 son diferentes de 1 ó 0.

i. $\text{Prob}(\alpha) = |a_1|^2$ y $\text{Prob}(\neg\alpha) = |a_0|^2$ (por ap-definición 3.1).

ii. $0 \leq \text{Prob}(\delta) \leq 1$, para toda fórmula δ (por ap-definición 3.1).

iii. $\text{Prob}(\Gamma) = \text{Prob}(\gamma_1) \cdot \text{Prob}(\gamma_2) \ldots \text{Prob}(\gamma_n) \cdot \text{Prob}(\alpha) \cdot \text{Prob}(\neg\alpha)$ (por ap-definición 3.1, ap-definición 4.1, condición (iii), ap-teorema 3.1, literal (i)).

iv. $\text{Prob}(\Gamma) \leq \text{Prob}(\alpha)$ y $\text{Prob}(\Gamma) \leq \text{Prob}(\neg\alpha)$, puesto que $nx \leq x$ si $0 \leq n \leq 1$ y $0 < x < 1$.

v. Por lo tanto, $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \neg\alpha$ (por definición 2.8).

$\square$

Conclusiones

- Cada objetivo específico ha sido desarrollado de la siguiente manera: primer objetivo, sección 2.1; segundo objetivo, apéndice A; tercer objetivo, sección 2.2, cuarto objetivo, teoremas 2.2, 2.3 y 2.4. El objetivo general del proyecto es alcanzado en el teorema 2.5.

- De acuerdo a los teoremas 2.2, 2.3 y 2.4, la *Quantum Computational Logic (**QCL**)* es una lógica paraconsistente, es más, podría decirse que es una lógica "bi-paraconsistente", puesto que contiene dos operadores de negación paraconsistentes.

- Quizás el resultado más importante de este proyecto, lo constituya la demostración de la existencia de teorías paraconsistentes en el contexto de la computación (teorema 2.5). Aunque estos resultados fueron establecidos en el contexto de la computación cuántica, la equivalencia entre los modelos cuánticos (sobre espacios finitos dimensionales) y los modelos clásicos de computación, permite omitir el adjetivo "cuántica".

- Los resultados obtenidos en este proyecto han generado diferentes problemas que están por resolverse, entre ellos:

  - Un primer problema a resolver es analizar la paraconsistencia o no de la **QCL**, bajo definiciones más restrictivas de "lógica paraconsistente" y/o "negación paraconsistente".
  - Si es posible generalizar la **QCL** para la adecuada manipulación de espacios de Hilbert infinito dimensionales (para ello es necesario, o bien modificar la definición de realización computacional cuántica (apdefinición 4.1), o bien permitir que las fórmulas de la **QCL** sean de longitud infinita) surge el problema —el más interesante para nosotros— de establecer lógicas paraconsistentes para la hipercomputación cuántica y de allí, construir teorías de hipercomputación paraconsistentes. El requerimiento de los espacios infinitos dimensionales está sustentado en que las propuestas de modelos de hipercomputación cuánticos operan sobre estos espacios.

- Debido a la equivalencia entre el modelo de circuitos cuánticos y el modelo de máquinas de Turing cuánticas, surge el problema de adecuar la **QCL**, la cual es establecida en el contexto de los circuitos cuánticos, al contexto de las máquinas de Turing cuánticas.
- Aunque la **QCL** es establecida en el nivel sentencial (*zero order level*), esta sólo es construida en su fragmento de nivel cero (*zero degree fragment*), puesto que sólo estan definidos los conectivos de, negación ($\neg$), conjunción ($\curlywedge$), raíz cuadrada de la negación ($\sqrt{\neg}$) y disyunción ($\curlyvee$) [48, p. 157]. Un problema es la ampliación de la **QCL** a fragmentos de mayor grado, es decir, es necesario definir un conectivo de implicación para la **QCL**.

• En un contexto más general, sin necesidad de sostener que las lógicas paraconsistentes son un sustituto de la lógica clásica, y en consecuencia, sin necesidad de sostener que las teorías paraconsistentes son un sustituto de las teorías que no lo son, las propuestas de teorías paraconsistentes son al menos una alternativa adicional, para una mejor comprensión de los objetos y métodos que describen estas teorías.

Bibliografía

[1] Henk Barendregt. Functional programming and lambda calculus. En J. van Leewen, editor, "Handbook of Theoretical Computer Science", tomo B, páginas 321–363. Elsevier (1990).

[2] Diderick Batens y Jose Meheus. A tableau method for inconsistency-adaptive logics. En Roy Dyckhoff, editor, "Automated reasoning with analytic tableaux and related methods", tomo 1847 de "Lecture Notes in Artificial Intelligence", páginas 127–142. Springer (2000).

[3] Nuel D. Belnap. How a computer should think. En Gilbert Ryle, editor, "Contemporary aspects of philosophy", páginas 30–56. London: Oriel Press (1976).

[4] Nuel D. Belnap. A useful four-logic. En "Moderns uses of multiple-valued logic", páginas 5–37. Proc. of the 1975 International Simposium on Miltiple-valued Logics., Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company (1976).

[5] Charles H. Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM J. Res. and Dev.* páginas 525–532 (november 1973).

[6] Garret Birkhoff y John von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Ann. Math.* **37**(4), 823–843 (1936).

[7] M. Andrés Bobenrieth. "¿Inconsistencias, por qué no?" Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores, División Gráfica (1996).

[8] Samuel L. Braunstein. Quantum computation: a tutorial. Eprint: `chemphys.weizmann.ac.il/~schmuel/comp/comp.html` (1995).

[9] Jean-Yves Béziau. What is paraconsistent logic? En Diderik Batens, Chris Mortensen, Graham Priest y Jean-Paul van Bendegem, editores, "Frontiers of paraconsistent logic", páginas 95–111. Hertfordshire, England: Research Studies Press LTD. (2000).

[10] Adan Cabello. Bibliographic guide to the foundations of quantum mechanics and quantum information. Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0012089` (2001).

[11] Cristian S. Calude. Incompleteness, complexity, randomness and beyond. Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0111118` (2001).

[12] Cristian S. Calude y Boris Pavlov. Coins, quantum measurements, and Turing's barrier. *Quantum Information Processing* **1**(1/2), 107–127 (2002).

[13] Gianpero Cattaneo et al. An unsharp logic from quantum computation. Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0201013` (2002).

[14] Isaac L. Chuang y Michael A. Nielsen. "Quantum Computation and Quantum Information". Cambridge University Press (2000).

[15] Alonso Church. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics* **58**(2), 345–363 (1936).

[16] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Franck Laloë. "Quantum mechanics", tomo 1. París: Hermann and John Wiley and Sons, Inc. (1997).

[17] B. Jack Copeland y Diane Proudfoot. Un Alan Turing desconocido. *Investigación y Ciencia* páginas 15–19 (junio 1999).

[18] Newton C. A. da Costa. On the theory of inconsistent formal system. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **XV**(4), 497–510 (octuber 1974).

[19] Newton C. A. da Costa. "Sistemas formais inconsistentes". Curitaba, Paraná, Brasil: Editora UFPR (1993).

[20] Newton C. A. da Costa, Jean-Yves Béziau y Otávio Bueno. "Elementos de

teoria paraconsistente de conjuntos". Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. U. Estadual de Campinas, Brasil (1993).

[21] Newton C. A. da Costa y Renato A. Lewin. Lógica paraconsistente. En "Enciclopedia IberoAmericana de Filosofía", tomo 7: Lógica, páginas 185–204. Madrid: Editorial Trotta, S.A. (1995).

[22] Maria L. Dalla y Roberto Giuntini. Quantum logic. Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0101028` (2001).

[23] David Deutsch. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97–117 (1985).

[24] David Deutsch. Quantum computational networks. *Proc. R. Soc. Lond. A* **425**, 73–90 (1989).

[25] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschr. Phys.* **48**(9–11), 771–783 (2000).

[26] Edward Fredkin y Tommaso Toffoli. Conservative logic. *Int. J. Theor. Phys.* **21**(3/4), 219–253 (1982).

[27] A. Galindo y P. Pascual. "Mecánica cuántica". Madrid: Editorial Alhambra, S.A. (1978).

[28] John Gill. Computational complexity of probabilistic Turing machines. *SIAM J. Comput.* **6**(4), 675–695 (december 1977).

[29] Jozef Gruska. "Quantum computing". Cambridge: McGraw-Hill International (UK) Limited (1999).

[30] Raúl Gómez Marín y Andrés Sicard Ramírez. "Informática teórica: Elementos propedeúticos". Medellín: Fondo Editorial U. EAFIT (2001).

[31] Andrew Hodges. "Alan Turing: Un filósofo natural". Barcelona: Grupo Editorial Norma (1998).

[32] R. I. G. Hughes. Lógica cuántica. *Investigación y Ciencia* **63** (1981).

[33] Tien D. Kieu. Hilbert's incompleteness, Chaitin ω number and quantum physics. Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0111062` (2001).

[34] Tien D. Kieu. A reformulation of Hilbert's tenth problem through quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond. A* **460**, 1535–1545 (2004).

[35] Stephen C. Kleene. "Introducción a la metamatemática". Colección: Estructura y Función. Madrid: Editorial Tecnos (1974).

[36] Sergio F. Martínez. Lógica cuántica. En "Encliclopedia IberoAmericana de Filosofía", tomo 7: Lógica, páginas 227–236. Madrid: Editorial Trotta, S.A. (1995).

[37] Robert Meyer y Chris Mortensen. Inconsistent models for revelant arithmetics. *The Journal of Symbolic Logic* **49**(3), 917–929 (september 1984).

[38] José Luis Montes Gutiérrez y Camilo Ernesto Restrepo Ramírez. Lógicas paraconsistentes: una introducción. Monografía Ingeniería de Sistemas, U. EAFIT (2002).

[39] Chris Mortensen. Models for inconsistent and incomplete differential calculus. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **31**(2), 274–285 (1990).

[40] Jean Norman y Richard Sylvan, editores. "Directions in relevant logic". Kluwer Academic Publishers (1989).

[41] Jean Norman y Richard Sylvan. Introduction: Routes in relevants logic. *En: [40]* páginas 1–21 (1989).

[42] Lorenzo Peña. "Introducción a las lógicas no clásicas". Instituto de Investigaciones Filosóficas. Colección: Cuadernos. México D.F.: U. Autónoma de México (1993).

[43] Emil Post. Finite combinatory process-formulation 1. *The Journal of Symbolic Logic* **1**(3), 103–105 (1936).

[44] Graham Priest. Inconsistent models of arithmetic. Parte I: Finite models. *J. Philos. Logic* **26**(2), 223–235 (1997).

[45] Graham Priest. Inconsistent models of arithmetic. Parte II: The general case. *The Journal of Symbolic Logic* **65**(4), 1519–1529 (2000).

[46] Graham Priest y Richard Routley. Applications of paraconsistent logic. En Priest et al [49], páginas 367–393.

[47] Graham Priest y Richard Routley. An outline of the history of (logical) dialectic. En Priest et al [49], páginas 76–98.

[48] Graham Priest y Richard Routley. Systems of paraconsitent logic. En Priest et al [49], páginas 151–186.

[49] Graham Priest, Richard Routley y Jean Norman, editores. "Paraconsistent logic: essays on the inconsistent". München, Viena: Philosophia Verlag (1989).

[50] Eleanor Rieffel y Wolfgang Polak. An introduction to quantum computing for non-physicists. *ACM Computing Surveys* **32**(3), 300–335 (2000).

[51] Peter W. Shor. Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring. En "Proc. 35th Symposium on Foundations of Computer Science", páginas 124–134, Los Alamitos, CA (1994). IEEE Computer Society Press. Preprint: `citeseer.ist.psu.edu/14533.html`.

[52] Peter W. Shor. Polinomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.* **26**(5), 1484–1509 (1997).

[53] Peter W. Shor. Introduction to quantum algorithms. Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/0005003` (2000).

[54] Andrés Sicard y Mario Vélez. Algunos elementos introductorios acerca de la computación cuántica (1999). Memorias VII Encuentro ERM. U. de Antioquia, Medellín. Agosto 23-27.

[55] Andrés Sicard y Mario Vélez. Some relations between quantum Turing machines and Turing machines. (Preprint) (1999).

[56] Andrés Sicard y Mario Vélez. Hipercomputación: La próxima generación de la computación teórica. *Rev. U. EAFIT* **123**, 47–51 (2001).

[57] Andrés Sicard Ramírez, Juan C. Agudelo Agudelo y Mario E. Vélez Ruiz. Redes neuronales recurrentes análogas con pesos enteros. (Preprint) (2000).

[58] Hava T. Siegelmann. "Neural networks and analog computation. Beyond the Turing limit". Progress in Theorical Computer Science. Boston: Birkhäuser (1999).

[59] Manuel Sierra. Sistema de lógica paraconsistente *c*1. *Rev. U. EAFIT* **118**, 23–34 (2000). Eprint: `www.eafit.edu.co/revista/118`.

[60] Mathias Steffen y Isaac L. Chuang. Toward quantum computation: A five-qubit quantum processor. *IEEE Micro* páginas 24–34 (march-april 2001).

[61] Richard Sylvan y Jack Copeland. Computability is logic-relative. *Philosophy Research Papers, University of Canterbury* **5**, 1–16 (1998).

[62] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.* **42**, 230–265 (1936-7). A correction, ibid, vol. 43, no. 2198, p. 544–546, 1937.

[63] Timothy Vermier. Inconsistent-adaptative arithmetic. Eprint: `logica.rug.ac.be/~timothy/resources/iaa.ps.zip`.

[64] Mario Vélez y Andrés Sicard. Computación cuántica: una perspectiva desde lo continuo. *Rev. U. EAFIT* **118**, 41–46 (2000).

[65] Mario Vélez y Andrés Sicard. Sobre un modelo de computación cuántica sobre variables continuas. (Preprint) (2000).

[66] Mario E. Vélez Ruiz y Andrés Sicard Ramírez. Cuántica y computación: una aproximación desde los postulados de la mecánica cuántica. (Preprint) (1999).

[67] Colin P. Williams y Scott H. Clearwater. "Explorations in quantum computing". New York: Springer-Telos (1997).

[68] Ítala M. L. D'Ottaviano. On the development of paraconsistent logic and Da Costa's work. *The journal of Non Classical Logic* **7**(1/2), 89–152 (1990).

Apéndice A

QCL

Como se mencionó en la sección 2.3, este apéndice está compuesto por el artículo *"An unsharp logic from quantum computation"* [13], en la cual, Gianpero Cattaneo, Maria L. Dalla, Roberto Giuntini y Roberto Leporini presentan la *Quantum Computational Logic (**QCL**)*.