Autorreferencia en el Contexto de las Máquinas de Turing Cuánticas*

Andrés Sicard Ramírez
asicard@.eafit.edu.co

Mario Elkin Vélez Ruiz
mvelez@.eafit.edu.co

Grupo de Lógica y Computación
Escuela de Ciencias y Humanidades
Universidad EAFIT; Medellín, Colombia

Resumen

La posibilidad de autorreferencia para una máquina de Turing cuántica es presentada desde dos puntos de vista: auto-modificación y auto-medida.

Abstract

The self-reference possibility for quantum Turing machine is introduce from two point of view: self-modification and self-measure.

1 Introducción

Las máquinas de Turing cuánticas (MTQ) [7, 15, 18] y los circuitos cuánticos (CC) [4, 8, 17] son modelos de computación equivalentes [8, 21] que sustentan sus operaciones en las leyes de la mecánica cuántica. Por otra parte, "*todo lenguaje, todo sistema formal, todo programa de ordenador, todo proceso de pensamiento, llegan tarde o temprano a la situación límite de la autorreferencia: de querer expresarse sobre sí mismos.*" [13].

La capacidad de autorreferencia de un sistema está ligada a su poder expresivo. En el contexto de las máquinas de Turing cuánticas este poder expresivo puede ser pensado desde dos perspectivas diferentes, la posibilidad de modificarse a sí mismas y la posibilidad de conocer propiedades de sí mismas.

La sección 2 introduce la posibilidad de automodifación de una MTQ. Inicialmente se presentan los inconvenientes surgidos de la representación usual para las MTQ's (cuadro de Schrödinger). Se presenta entonces otra posible representación para las MTQ's (cuadro de Heisenberg) y se señalan otros posibles inconvenientes. Luego, para las máquinas de Turing (MT's) y para las máquinas de Turing cuánticas son indicadas las propiedades metamatemáticas de la lógica y de las teorías subyacentes a las mismas (la aritmética para las MT's y la teoría de conjuntos de Zermelo-Franklien con axioma de elección, para las MTQ's) y se presentan algunas conclusiones con base en estas propiedades.

La sección 3 introduce la posibilidad de automedida de una MTQ. En este caso siguiendo los trabajos de David Z. Albert, se presenta un autómata cuántico, para el cual es posible definir un observable que permite que el autómata conozca propiedades de sí mismo. El formalismo empleado para la construcción del autóma, conlleva a una interpretación no clásica de la mecánica cuántica. La intrepretación seleccionada (intepretación de mundos-posibles) es la misma interpretación en la cual se expresa el comportamiento de una MTQ.

*Este artículo fue financiado por la universidad EAFIT, bajo el proyecto de investigación número 817407.

2 Auto-modificación

Una primera alternativa de autorreferencia para las máquinas de Turing cuánticas, consistiría en la posibilidad de que una MTQ modifique por sí misma su comportamiento, durante su evolución. Uno de los autores estudió esta posibilidad en el contexto de las máquinas de Turing y encontró la imposibilidad de que esto se lleve a cabo [19].

Para las máquinas de Turing cuánticas la imposibilidad de automodificación puede ser entendida con base en las leyes de evolución de la mecánica cuántica. Para una MTQ se definen sus estados, los cuales son vectores de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ apropiado; sus observables, los cuales son operadores Hermíticos sobre el espacio $\mathcal{H}$ y un operador unitario de evolución temporal U [7, 15, 18]. Si $|\,\psi(0)\rangle$ es un estado inicial de una MTQ, la evolución durante $t \in \mathbb{Z}^+$ pasos de computación está dada por [7, 15]

$$|\,\psi(t)\rangle = U^t\,|\,\psi(0)\rangle\,. \tag{1}$$

El operador U representa el comportamiento de la MTQ, es decir, diferentes operadores U, representarán diferentes MTQ's. La ecuación (1) está presentada en el formalismo denominado cuadro de Schrödinger.

Para cualquier sistema cuántico descrito con el cuadro de Schrödinger, los estados evolucionan en el tiempo, mientras que los operadores no lo hacen [9, 11], por lo tanto, la posibilidad de que una MTQ modifique su operador de evolución U y por lo tanto, modifique su comportamiento, contradice los principios del cuadro de Schrödinger.

Existe un formalismo alternativo para presentar la evolución de una MTQ. Sea $|\,\psi\rangle$ un estado de un sistema cuántico y sea U un operador unitario, se define una transformación lineal para un operador lineal N por [9]

$$N^{\circledast} = UNU^{\dagger}, \tag{2}$$

para la cual se puede demostrar que

$$N\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle \text{ si y sólo si } N^{\circledast}U\,|\,n\rangle = nU\,|\,n\rangle\,, \tag{3}$$

es decir, n es un autovalor de N con autovector correspondiente $|\,n\rangle$ si y sólo si n es un autovalor de $N^{\circledast}$ con autovector correspondiente $U\,|\,n\rangle$.

Sea $|\,\psi\rangle$ un estado de una MTQ, sea U un operador unitario de evolución temporal y sea N un operador lineal, entonces

$$\begin{aligned} UN\,|\,\psi\rangle &= UNU^{\dagger}U\,|\,\psi\rangle \\ &= N^{\circledast}U\,|\,\psi\rangle\,, \end{aligned} \tag{4}$$

de acuerdo a la ecuación (4), después de realizar la operación U, el operador $N^{\circledast} = UNU^{\dagger}$ actua de la misma forma que el operador N antes de realizar la operación U, de donde es posible pensar que la aplicación del operador U transforma el operador N en el operador $UNU^{\dagger}$ [10], es decir,

$$N \xrightarrow{U|\,\psi\rangle} UNU^{\dagger}. \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) dan una idea de un formalismo para representar la evolución de una MTQ, en el cual los operadores evolucionan en el tiempo y los estados no lo hacen, este formalismo es denominado cuadro de Heisenberg [9, 11]. Aunque este formalismo ha sido utilizado para la definición de operaciones cuánticas tolerantes a fallas [10, 11], para las cuales lo que importa es el comportamiento de la operación N, no es claro para los autores, el posible cambio del operador de evolución U en este formalismo. Se subraya que lo importante es el cambio de la operación N indicado por la ecuaciones (4) y (5); es decir, si en la ecuación (4) se reemplaza U por N se obtiene

$$U^2\,|\,\psi\rangle = U^2U^{\dagger}U\,|\,\psi\rangle\,, \tag{6}$$

y por la tanto la ecuación (5) pasa a ser

$$U \xrightarrow{U|\,\psi\rangle} UUU^{\dagger}, \tag{7}$$

y en esta última, el operador U no sufre ninguna modificación.

Otra alternativa de estudiar la posibilidad de automodificación de una MTQ es a partir del sistema lógico o sistema formal subyacente a ésta. Para las funciones Turing-computables o funciones recursivas, Ozawa presenta la siguiente relación:

> "A function $y = f(x)$ of the natural numbers is said to be representable in a formal system including the arithmetic, if there is a formula $\phi(x, y)$ in that system such that for any natural numbers m, n and the symbols μ, ν in that system representing m, n respectively, if $m = f(n)$ then the formula $\phi(\mu, \nu)$ is provable and if $m \neq f(n)$ then the negation of $\phi(\mu, \nu)$ is provable. Then, it is well-known that if the system is consistent, the class of representable functions coincides with the class of recursive functions." [14, p. 6]

Y para la funciones computables por una MTQ, el mismo autor presenta la siguiente relación:

> "Since a quantum algorithm depends on the theory of Hilbert spaces and operators, the proof may use theorems in much wider fields than pure arithmetic, but they can be formalized in the Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of choice (ZFC), an axiomatic foundation of the current mathematics. Then, we require that any quantum algorithm can be expressed by a numeralwise provable formula in the following sense: By the formalization of the quantum algorithm $\mathcal{Q}$ and its proof in ZFC we can construct a formula $\phi(x, y)$ in ZFC such that if $m = f(n)$ then $\phi(\mu, \nu)$ is provable and if $m \neq f(n)$ then the negation of $\phi(\mu, \nu)$ is provable (from a formal point of view, the quantum algorithm $\mathcal{Q}$ can be identified with the formula $\phi(x, y)$ and the status of $\mathcal{Q}$ can be regarded as an intuitive expression of $\phi(x, y)$). If this is the case, the function f is representable by $\phi(x, y)$ in ZFC so that f is a recursive function. Thus, we can conclude that every function f computable by a quantum algorithm is a recursive function." [14, p. 6]

Ambos tipos de funciones (Turing-computables, computables por un MTQ), están asociados con teorías formales (aritmética, ZFC) de la lógica clásica de predicados de primer orden. Las teorías en cuestión son consistentes pero incompletas [12]. La incompletitud de las teorías está sustentada en la capacidad de autorreferencia de las mismas, por ejemplo, el enunciado construído por Gödel para la demostración de la incompletitud de la aritmética, puede ser presentado de la siguiente manera [16]; sea

$$\{P(w)\}_i = P_1(w), P_2(w), \ldots, P_n(w), \ldots \tag{8}$$

una enumeración de las funciones proposicionales de una sóla variable de la teoría, sea

$$\{D\}_j = D_1, D_2, \ldots, D_x, \ldots \tag{9}$$

una enumeración de las demostraciones en la teoría y sea $DP(x, w)$ un predicado tal que

$$DP(x, w) \equiv D_x \text{ demuestra } P_w(w). \tag{10}$$

Con en el enunciado $DP(x, w)$ se puede construir un enunciado de la forma

$$\neg\exists x(DP(x, w)), \tag{11}$$

como este enunciado es una función proposicional de un variable, le corresponde un número de la lista $\{P(w)\}_i$, sea éste el número k, entonces

$$P(w)_k = \neg\exists x(DP(x, w)), \tag{12}$$

entonces, cuando $w = k$ se tiene el enunciado autorreferencial

$$P(k)_k = \neg\exists x(DP(x, k)), \tag{13}$$

es decir, un enunciado que expresa que no existe demostración para el mismo.

Es posible afirmar que la indecidibilidad de la lógica de predicados de primer orden y la incompletitud de las teorías en las cuales se expresan los modelos de computación clásicos y cuánticos, son por una parte, la que ofrecen a dichos modelos el poder expresivo que éstos ostentan, pero por otro lado, son las causantes de las limitaciones de los mismos, por ejemplo, se puede pensar que el problema de la decibilidad de la lógica de predicados de primer orden y el problema de la parada de una máquina de Turing son problemas equivalentes, con base en que sí esta lógica fuera decidible, el problema de la parada tendría solución [5], pero de hecho, esta lógica es indecidible y el problema es irresoluble.

3 Auto-medida

Una segunda alternativa de autorreferencia para las máquinas de Turing cuánticas, puede ser pensada a partir de los trabajos de David Albert acerca de autómatas cuánticos, sistemas cuánticos y la posible capacidad de que los primeros conozcan propiedades de sí mismos [1, 2, 3].

El uso de la expresión "autómata cuántico" en lugar de "máquina de Turing cuántica" refleja el hecho que el automáta, además de contar con un conjunto de instrucciones de comportamiento propio y mecanismos de entrada y salida, tal como una MTQ, cuenta además con una variedad de instrumentos para medir una variedad de observables y con un conjunto de instrucciones para predecir el comportamiento de algún sistema cuántico.

Sea S un sistema cuántico, AC un autómata cuántico y $AC + S$ el sistema cuántico compuesto por AC y S. La descripción del comportamiento del autómata cuántico seguirá a [1, 2], se utilizará la notación para los estados propuesta en [1] donde los estados del sistema S se representaran por $|\, letra_i\rangle_S$, los estados del automáta AC se representaran por $|\, letra_i\rangle_O$ donde O es un observable y los estados del sistema compuesto $AC + S$ se representaran por $\left|\, letra^{(i)}\right\rangle$.

Inicialmente, se prepara el sistema S en el estado representado por

$$|\,\alpha_1\rangle_S\,, \tag{14}$$

es decir, el sistema S tiene un observable A con comportamiento[1]

$$A\,|\,\alpha_1\rangle_S = \alpha_1\,|\,\alpha_1\rangle_S\,. \tag{15}$$

Si se instruye al autómata AC para medir el valor del observable A, una vez realizada la medida, el autómata estará en el estado

$$|\,\alpha_1\rangle_A\,, \tag{16}$$

por lo cual, existe un observable[2] P_A tal que

$$P_A\,|\,\alpha_1\rangle_A = \alpha_1\,|\,\alpha_1\rangle_A\,, \tag{17}$$

donde, el observable P_A del autómata cuántico AC mide el observable A del sistema cuántico S.

Con base en que ambos sistemas (AC y S) son cuánticos, el estado del sistema compuesto $AC + S$, una vez realizada la medida, está dado por

$$\left|\,\alpha_1^{(1)}\right\rangle = |\,\alpha_1\rangle_A \otimes |\,\alpha_1\rangle_S\,. \tag{18}$$

Ahora, sí se prepara el sistema S en el estado

$$|\,\beta_1\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|\,\alpha_1\rangle_S + |\,\alpha_2\rangle_S\Big), \tag{19}$$

donde

$$\begin{aligned} A\,|\,\alpha_2\rangle_S &= \alpha_2\,|\,\alpha_2\rangle_S\,,\\ B\,|\,\beta_1\rangle_S &= \beta_1\,|\,\beta_1\rangle_S\,, \end{aligned} \tag{20}$$

y de nuevo se instruye al autómata AC para medir el valor del observable A, una vez realizada la medida, el estado del autómata será

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|\,\alpha_1\rangle_A + |\,\alpha_2\rangle_A\Big), \tag{21}$$

donde

$$P_A\,|\,\alpha_2\rangle_A = \alpha_2\,|\,\alpha_2\rangle_A\,. \tag{22}$$

El estado del sistema compuesto $AC+S$ será entonces

$$\begin{aligned} \left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|\,\alpha_1\rangle_A + |\,\alpha_2\rangle_A\Big)\otimes \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|\,\alpha_1\rangle_S + |\,\alpha_2\rangle_S\Big); \end{aligned} \tag{23}$$

pero dado que se supone que el observable P_A del autómata AC mide correctamente el observable A del sistema S, los términos $|\,\alpha_1\rangle_A \otimes |\,\alpha_2\rangle_S$ y $|\,\alpha_2\rangle_A \otimes |\,\alpha_1\rangle_S$ de la ecuación (23) son fisícamente imposibles, por lo cual el estado del sistema compuesto $AC + S$ será

[1] La existencia de este observable está garantizada por un teorema de la mecánica cuántica que establece que cada estado de cada sistema cuántico puede ser asociado con valores definidos de algún conjunto completo de observables [2].

[2] cf. nota 1.

$$\left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|\,\alpha_1\rangle_A \otimes |\,\alpha_1\rangle_S + |\,\alpha_2\rangle_A \otimes |\,\alpha_2\rangle_S\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\,\alpha_1^{(1)}\right\rangle + \left|\,\alpha_2^{(1)}\right\rangle\Big). \tag{24}$$

Lo mencionado hasta el momento para el autómata cuántico AC, es decir, su capacidad de medir y predecir cosas externas a sí mismo, permite pensar en éste como un observador [1][3].

La ecuación (24) indica que después de realizada la medida no hay un colapso de la función de onda y esto contradice la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica[4]. Una interpretación plausible de la ecuación (24) sería la interpretación de mundos-posibles sugerida por Hugh Everett III. Bajo esta interpretación la ecuación (24) representaría dos mundos posibles [3], un primer mundo posible donde los observables P_A y A tengan el valor α_1 y un segundo mundo posible donde los observables P_A y A tengan el valor α_2.

Una posible objeción para la interpretación de mundos-posibles está sustentada en la idea de que los mundos posibles surgidos de una función de onda, tienen como base los términos separados que la constituyen; pero estos términos están sujetos a la base seleccionada para escribir la función de onda en cuestión, por lo cual, un cambio de base para la función de onda, cambiaría los términos separados y a partir de éstos, surgirían nuevos mundos posibles. Dado que, en el formalismo estándar de la mecánica cuántica, la base seleccionada para expresar la función de onda no tiene significado físico, sería necesario un nuevo principio que indicara como seleccionar dicha base y de acuerdo a ésta, cuales deberían ser los mundos posibles aceptados[5].

La justificación para seleccionar la interpretación de mundos-posibles en lugar de otra interpretación, consiste en que esta interpretación es la misma sobre la cual se sustenta el comportamiento de las máquinas de Turing cuánticas, en palabras de David Deutsch:

> "In explaining the operation of quantum computers I have, where necessary, assumed Everett's ontology. Of course the explanations could always be 'translated' into the conventional interpretation, but no without entirely losing their explanatory power. Suppose, for example, a quantum computer were programmed as in the Stock Exchange problem described. Each day it is given different data. The Everett interpretation explains well how the computer's behavior follows from its having delegated subtasks to copies of itself in other universes. On the day when the computer succeeds in performing two processor-days of computation, how would the conventional interpretations explain the presence of the correct answer? *¿Where was it computed?*" [7, p. 114]

Ahora, en relación con la capacidad de auto-medida del autómata cuántico AC, se define un observable[6] $B^{(1)}$ para el sistema compuesto $AC + S$ tal que

$$B^{(1)}\left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle = \beta_1^{(1)}\left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle. \tag{25}$$

El observable $B^{(1)}$ es un observable del sistema $AC + S$ que mide una propiedad de sí mismo, su medida para el observable A.

Si se prepara el sistema S en el estado dado por la ecuación (19) y se instruye al automáta para realizar la medida del observable $B^{(1)}$, una vez realizada la medida, el estado final del autómata viene a ser

$$\left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle_{B^{(1)}}, \tag{26}$$

donde

$$P_{B^{(1)}}\left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle_{B^{(1)}} = \beta_1^{(1)}\left|\,\beta_1^{(1)}\right\rangle_{B^{(1)}}. \tag{27}$$

[3] De hecho, Albert [3, cap. 8] realiza un análisis similar al anterior, pero en lugar de un autómata cuántico, reemplaza éste, por un observador humano.

[4] También sería posible hallar una contradicción con la interpretación de Copenhague en términos de las relaciones de incertidumbre, con base en la medida simultánea de observables que no conmutan [1].

[5] Con base en esta y otras objeciones, Albert [1, cap. 8] presenta un análisis de la situación descrita bajo otras interpretaciones de la mecánica cuántica (teoría de Bohm, intepretación de mentes-posibles y la *bare theory*).

[6] cf. nota 1.

El estado final del sistema compuesto $AC+S$ despúes de realizada la medida viene a ser

$$\left| \beta_1^{(2)} \right\rangle = \left| \beta_1^{(1)} \right\rangle_{B^{(1)}} \otimes \left| \beta_1^{(1)} \right\rangle . \qquad (28)$$

La ecuación (28) representa el estado del sistema compuesto cuando el autómata ha medido algo acerca de sí mismo. Los observables P_A y $P_B^{(1)}$ se refieren a sub-sistemas físicos separados, se podría pensar en estos, como almacenamientos de memoria diferentes al interior del autómata. La hipótesis en la cual descansa la ecuación (28) es que estos sub-sistemas pueden ser reunidos en un sistema compuesto que los contenga a ambos, y aunque en la práctica tal sistema podría ser no realizable, a nivel de un experimento mental, tal sistema es concebible.

4 Conclusiones

En relación con la posibilidad de auto-modificación de una MTQ, esta auto-modificación permitiría pensar que una MTQ fuera un modelo de hipercomputación, es decir, un modelo de computación que pudiera computar funciones no Turing-computables; sin embargo, este no es el caso y los conjuntos de las funciones Turing-computables y las funciones computables por una MTQ son coextensivos [7, 14, 20]. Tal como ya ha sido expresado por los autores anteriormente [20], una buena posibilidad de contar con modelos de computación más potentes (en términos de lo que éstos pueden computar), es modificar la lógica subyacente a los mismos. En particular, una hipótesis de trabajo consiste en pensar en modelos de computación construidos sobre una lógica paraconsistente y esta hipótesis cobra mayor fuerza en el contexto de las máquinas de Turing cuánticas, debido a la existencia de ciertas formulaciones de la mécanica cuántica que involucran elementos de teorías paraconsistentes [6], lo cual permitiría pensar en lógicas cuánticas paraconsistentes y sobre éstas, en modelos de computación cuánticos paraconsistentes.

En relación con la posibilidad de auto-medida de una MTQ, sí la situación presentada del autómata AC se generalizará por medio de un segundo autómata que hiciera predicciones sobre el comportamiento del primero, y un tercer autómata que hiciera predicciones sobre el comportamiento del segundo autómata y así sucesivamente, se tendría una jerarquía de niveles de medida, en primer lugar, medidas que producen conocimiento de un algún sistema externo, en segundo lugar, medidas que producen no solo conocimiento de algún sistema externo, sino además conocimiento del conocimiento del autómata acerca del sistema, y así sucesivamente [2]. Pero de mayor importancia para los autores, sin importar las diferencias mencionadas entre una máquina de Turing cuántica y un autómata cuántico como el presentado y sin considerar la posibilidad o no de su realización, es que el autómata cuántico presentado es posible dentro del formalismo empleado por la mecánica cuántica y dentro de una de sus posibles interpretaciones, y este constructo teórico, deja varios interrogantes sin responder y abre la puerta a nuevas posibilidades y a nuevos problemas.

Referencias

[1] Albert, David Z.: *On quantum-mechanical automata.* Phys. Lett., 98A:249–252, 1983.

[2] Albert, David Z.: *A quantum-mechanical automaton.* Philosophy of Science, 54:577–585, 1987.

[3] Albert, David Z.: *Quantum Mechanics and Experience.* Harvard University Press, 1992.

[4] Barenco, Adriano, Charles H. Bennett, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, John Smolin y Harald Weinfurter: *Elementary gates for quantum computation.* Phys. Rev. A, 52(5):3457–3467, 1995.

[5] Boolos, George y Richard Jeffrey: *Computability and Logic.* Cambridge University Press, 3ª edición, 1989.

[6] da Costa, Newton C. A. y Renato A. Lewin: *Lógica paraconsistente.* En Alchourrón, Carlos E., José M. Mendez y Raúl Orayen (editores):

Lógica, volumen 7 de *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, páginas 185–204. Editorial Trotta S.A., 2005.

[7] Deutsch, David: *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer.* Proc. R. Soc. Lond. A, 400:97–117, 1985.

[8] Deutsch, David: *Quantum computational networks.* Proc. R. Soc. Lond. A, 425:73–90, 1989.

[9] Dirac, P. A. M.: *Principios de Mecánica Cuántica.* Ediciones Arial, 1967.

[10] Gottesman, Daniel: *Theory of fault-tolerance quantum computation.* Phys. Rev. A, 57(1):127, 1998.

[11] Gottesman, Daniel: *The Heisenberg represetantion of quantum computers.* Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/9807006`, 1999.

[12] Gödel, Kurt: *Obras Completas.* Alianza Universidad, 2ª edición, 1989.

[13] Hosfstader, Douglas: *Gödel, Escher y Bach: Un eterno y grácil bucle.* Superinfimos 9. TusQuest Editores, 3ª edición, 1989.

[14] Ozawa, Masanao: *Measurability and computability.* Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/9809048`, 1998.

[15] Ozawa, Masanao y Haramichi Nishimura: *Local transition function of quantum Turing machines.* Eprint: `arXiv.org/abs/quant-ph/9811069`, 1999.

[16] Penrose, Roger: *La Nueva Mente del Emperador.* Colección: Libro de mano No. 38. Barcelona: Grijalbo Mondadori, 1991.

[17] Sicard, Andrés y Mario Vélez: *Algunos elementos introductorios acerca de la computación cuántica*, 1999. VII Encuentro ERM. Universidad de Antioquia, Medellín. Agosto 23–27.

[18] Sicard, Andrés y Mario Vélez: *Some relations between quantum Turing machines and Turing machines.* (Draft), 1999.

[19] Sicard Ramírez, Andrés: *Máquinas de Turing dinámicas: Historia y desarrollo de una idea.* Tesis de Licenciatura, Departamento de Informática y Sistemas. Universidad EAFIT, 1998.

[20] Sicard-Ramírez, Andrés y Mario E. Vélez-Ruiz: *The Church-Turing thesis.* (Draft), 1999.

[21] Williams, Colin P. y Scott H. Clearwater: *Explorations in Quantum Computing.* Springer-Telos, 1997.