

# Compuerta de fase: realización física a partir de una fase abeliana (fase de Berry)

Mario E. Vélez Ruiz      Andrés Sicard Ramírez

Grupo de Lógica y Computación  
Escuela de Ciencias y Humanidades  
Universidad EAFIT  
Medellín, Colombia S.A.

## Resumen

Se define el qubit como cualquiera de los dos autoestados asociados al mismo autovalor de energía positiva de un hamiltoniano degenerado. Se muestra que mediante el uso de la evolución adiabática es posible construir un campo *gauge*. A partir del campo *gauge* se construye una compuerta de fase, la fase utilizada para construir la compuerta es la fase de Berry.

**PACS :** 03,65. – *w*, 03,67.*Lx*, 03,65.*Bz*

## 1. Introducción

La entidad fundamental en la computación cuántica es el qubit. Un qubit es un estado cuántico, generalmente asociado a un sistema físico que consiste en una descripción matemática similar a la representación de espín  $1/2$ . Los qubits son combinaciones lineales de los estados base  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , estos estados generalizan los valores 0 y 1 de un bit. Los estados en la base son mutuamente ortogonales de norma 1, geoméricamente conforman un espacio de Hilbert bidimensional. Un  $n$ -qubit no mezclado es la generalización del qubit y corresponde al producto tensorial de  $n$  qubits.

Una de las principales características del qubit se basa en el principio de superposición. Desde el punto de vista computacional, la superposición cuántica permite el paralelismo cuántico, éste a su vez, permite realizar múltiples operaciones en un mismo paso computacional.

Los qubits evolucionan de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica, la evolución se rige por medio de la ecuación de Schrödinger, los operadores de evolución corresponden a las compuertas lógico-cuánticas. Los algoritmos son secuencias de operadores unitarios que actúan sobre un  $n$ -qubit a la entrada y arrojan como resultado un  $n$ -qubit a la salida.

Cualquier sistema cuántico cuyos estados están descritos por una base de dos elementos mutuamente ortonormales admite en principio una interpretación de qubit. Algunas interpretaciones no solamente de qubits sino también de mecanismos de evolución controlada, se listan a continuación en la siguiente tabla.

	Qubit	Evolución controlada (compuerta)
1	Ion atrapado	Transiciones vibracionales y de espín
2	Átomo	Transición atómica
3	Espín nuclear	Transición nuclear
4	Polarización del fotón	Cambio de polarización

Existen éstas y muchas otras formas de interpretar el qubit, la que se describe a continuación corresponde a la descrita por un autoestado del hamiltoniano de un sistema cuántico el cual consiste de una partícula de espín 1/2 inmersa en un campo magnético. La descripción mencionada permite calcular los autoestados del hamiltoniano mediante el uso de los operadores de proyección. La evolución cuántica del qubit conduce naturalmente a la definición de potencial *gauge*. La naturaleza física de este potencial se atribuye a un monopolo de Dirac. El otro autoestado asociado al autovalor permite dar una forma alternativa de qubit, de esta interpretación se deduce que los dos autoestados están en pie de igualdad respecto de los procesos de la computación cuántica. De la misma manera que el primer autoestado del autovalor en cuestión, la evolución del qubit alternativo también permite definir un potencial *gauge*. Los potenciales *gauge* que derivan de los autoestados del autovalor están vinculados por una transformación *gauge*. La descripción que se plantea aquí es justamente la formulación matemática del monopolo de Dirac.

## 2. El hamiltoniano

Cualquier matriz hermítica  $2 \times 2$  puede expresarse en términos de la matriz identidad  $\mathbf{1}$  y de las tres matrices de Pauli  $\{\hat{\sigma}_i\}$  donde  $i \in \{x, y, z\}$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Los operadores relevantes para el cálculo de los autoestados de una partícula de espín 1/2 en un campo magnético son, el hamiltoniano  $\hat{H}$  y los operadores de proyección  $\hat{P}_\pm$  los cuales proyectan sobre los autoestados de energía  $\pm \epsilon$  respectivamente. La expresión para el hamiltoniano en la base  $\{\mathbf{1}, \hat{\sigma}_i\}$  propuesta para las matrices hermíticas es

$$\hat{H} = \epsilon_0 \mathbf{1} + \epsilon \boldsymbol{\lambda} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_x(t)\mathbf{i} + \lambda_y(t)\mathbf{j} + \lambda_z(t)\mathbf{k}$  es el vector unitario de Bloch, el valor  $\epsilon$  es la energía asociada a la interacción y el valor  $\epsilon_0$  es alguna energía de fondo la cual es independiente del acople. Sin perdida de generalidad  $\epsilon_0 = 0$ , la forma matricial del hamiltoniano es

$$\hat{H}(t) = \epsilon \begin{pmatrix} \lambda_z(t) & \lambda_x(t) - i\lambda_y(t) \\ \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) & -\lambda_z(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

## 3. Los proyectores

En la misma base en la que fue expresado el hamiltoniano es posible expresar los operadores de proyección como

$$\hat{P}_\pm(\boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (4)$$

donde  $\hat{P}_+$  proyecta sobre los estados asociados a un autovalor de energía positiva  $+\epsilon$ , mientras que  $\hat{P}_-$  proyecta sobre los estados asociados a un autovalor de energía negativa  $-\epsilon$ .

Las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_i$ , permiten calcular las expresiones para los proyectores

$$\hat{P}_\pm(\boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda_x(t)\hat{\sigma}_x \pm \lambda_y(t)\hat{\sigma}_y \pm \lambda_z(t)\hat{\sigma}_z), \quad (5)$$

en su forma matricial corresponden a

$$\hat{P}_\pm(\boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \pm \lambda_z(t) & \pm \lambda_x(t) \mp i\lambda_y(t) \\ \pm \lambda_x(t) \pm i\lambda_y(t) & 1 \mp \lambda_z(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

## 4. El qubit

Tomando en consideración la evolución adiabática [3], si se elige al autoestado instantáneo asociado al autovalor de energía positiva  $+\epsilon$  del hamiltoniano como el qubit, durante su evolución siempre estará en un autoestado del hamiltoniano instantáneo con el mismo autovalor asociado

$$|\psi_+^{(1)}(t)\rangle = \frac{1}{N_1} \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde  $N_1$  es un factor de normalización el cual puede calcularse teniendo en cuenta que

$$\langle \psi_+^{(1)}(t) | \psi_+^{(1)}(t) \rangle = 1. \quad (8)$$

Al calcular  $|\psi_+^{(1)}(t)\rangle$  teniendo presente la forma matricial en (6) de  $\hat{P}_+(s(t))$  se obtiene

$$|\psi_+^{(1)}(t)\rangle = \frac{1}{2N_1} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_z(t) & \lambda_x(t) - i\lambda_y(t) \\ \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) & 1 - \lambda_z(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

después de realizar los cálculos indicados y simplificar, se obtiene finalmente

$$|\psi_+^{(1)}(t)\rangle = \frac{1}{2N_1} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_z(t) \\ \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

la última expresión puede escribirse en la notación acostumbrada en la computación cuántica como

$$|\psi_+^{(1)}(t)\rangle = \frac{1}{2N_1}(1 + \lambda_z(t))|0\rangle + \frac{1}{2N_1}(\lambda_x(t) + i\lambda_y(t))|1\rangle, \quad (11)$$

donde el bra asociado al ket de la expresión (11) es

$$\langle \psi_+^{(1)}(t) | = \frac{1}{2N_1}(1 + \lambda_z(t))\langle 0 | + \frac{1}{2N_1}(\lambda_x(t) - i\lambda_y(t))\langle 1 |. \quad (12)$$

La condición de ortonormalización, la cual fue representada en la ecuación (8) implica que

$$\langle \psi_+^{(1)}(t) | \psi_+^{(1)}(t) \rangle = \frac{1}{4N_1^2}(1 + \lambda_z(t))^2 + \frac{1}{4N_1^2}(\lambda_x(t)^2 + \lambda_y(t)^2) = 1, \quad (13)$$

de otro lado el vector de Bloch tiene magnitud igual a 1, ello implica que

$$\lambda_x(t)^2 + \lambda_y(t)^2 + \lambda_z(t)^2 = 1, \quad (14)$$

con esto en mente y después de simplificar la ecuación (13) se obtiene

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \lambda_z(t))^{1/2}. \quad (15)$$

Al reemplazar esta última ecuación en la función de onda que se obtuvo en la expresión (10), conduce a la ecuación para el autoestado del hamiltoniano correspondiente al autovalor de energía positiva  $+\varepsilon$

$$\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \lambda_z(t))}} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_z(t) \\ \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

el cual puede expresarse en una forma completamente equivalente como

$$\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \lambda_z(t))}} [(1 + \lambda_z(t)) |0\rangle + (\lambda_x(t) + i\lambda_y(t)) |1\rangle], \quad (17)$$

donde el bra asociado al ket de la ecuación (17) está dado por

$$\left\langle \psi_+^{(1)}(t) \right| = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \lambda_z(t))}} [(1 + \lambda_z(t)) \langle 0| + (\lambda_x(t) - i\lambda_y(t)) \langle 1|]. \quad (18)$$

De otro lado existe una correspondencia uno a uno entre estados cuánticos, en nuestro caso estados puros, y operadores de proyección. Los operadores de proyección admiten una forma completamente análoga a la expresada en las ecuaciones (4). Se muestra a continuación esta equivalencia.

La forma usual para los proyectores en la computación cuántica es

$$\hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) = \left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle \left\langle \psi_+^{(1)}(t) \right|, \quad (19)$$

al reemplazar las ecuaciones (17) y (18) en la ecuación (19) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) = & \frac{1}{2} \{ (1 + \lambda_z(t)) |0\rangle\langle 0| + (\lambda_x(t) - i\lambda_y(t)) |0\rangle\langle 1| \\ & + (\lambda_x(t) + i\lambda_y(t)) |1\rangle\langle 0| + \frac{\lambda_x(t)^2 + \lambda_y(t)^2}{1 + \lambda_z(t)} |1\rangle\langle 1| \}, \end{aligned} \quad (20)$$

donde los símbolos de la forma  $|i\rangle\langle j|$  corresponden al producto tensorial  $|i\rangle \otimes \langle j|$  y están representados por las siguientes matrices

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

además se tiene que

$$\frac{\lambda_x(t)^2 + \lambda_y(t)^2}{1 + \lambda_z(t)} = \frac{1 - \lambda_z(t)^2}{1 + \lambda_z(t)} = (1 - \lambda_z(t)). \quad (22)$$

Si se reemplazan las matrices en (21), junto con la ecuación (22), en la ecuación (20) se obtiene

$$\hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_z(t) & \lambda_x(t) - i\lambda_y(t) \\ \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) & 1 - \lambda_z(t) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

expresión que justamente coincide con (6).

El hamiltoniano del sistema en cuestión, representado por la ecuación (3), es degenerado, por lo tanto se puede elegir otra clase de autoestado instantáneo del hamiltoniano, correspondiente al mismo autovalor de energía positiva  $+\epsilon$  dado por

$$|\psi_+^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{N_2} \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Al calcular  $|\psi_+^{(2)}(t)\rangle$  teniendo presente la forma matricial en (6) de  $\hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t))$  se obtiene

$$|\psi_+^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{2N_2} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_z(t) & \lambda_x(t) - i\lambda_y(t) \\ \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) & 1 - \lambda_z(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

después de realizar las operaciones indicadas en la ecuación (25), se deduce que

$$|\psi_+^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{2N_2} \begin{pmatrix} \lambda_x(t) - i\lambda_y(t) \\ 1 - \lambda_z(t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

La condición de ortonormalización

$$\langle \psi_+^{(2)}(t) | \psi_+^{(2)}(t) \rangle = 1, \quad (27)$$

permite calcular el valor del factor  $N_2$

$$N_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \lambda_z(t))}, \quad (28)$$

la sustitución de la ecuación (28) en la ecuación (26) conduce a

$$|\psi_+^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \lambda_z(t))}} \begin{pmatrix} \lambda_x(t) - i\lambda_y(t) \\ 1 - \lambda_z(t) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

o en la notación de la computación cuántica

$$|\psi_+^{(2)}(t)\rangle = \frac{\lambda_x(t) - i\lambda_y(t)}{\sqrt{2(1 - \lambda_z(t))}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \lambda_z(t))} |1\rangle. \quad (30)$$

Esta última expresión podría ser una forma alternativa de representar el qubit en una situación específica. La situación aquí desarrollada corresponde a un sistema cuántico, en el cual una partícula de espín 1/2 está inmersa en un campo magnético, el vector de Bloch está en la misma dirección del campo magnético y el autoestado del hamiltoniano corresponde a un autovalor de energía positiva  $+\epsilon$ .

## 5. La representación en coordenadas esféricas

Los estados puros de un qubit, ecuaciones (17) y (30) pueden ser expresados en un tipo particular de coordenadas llamadas coordenadas esféricas  $(\theta, \phi)$ . Este tipo particular de coordenadas permite ver los autoestados del hamiltoniano, es decir, los qubits como puntos en la dirección  $(\theta, \phi)$  de una esfera de radio 1 llamada la esfera de Bloch.

El vector de Bloch para estados puros  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  es un vector unitario, su representación en coordenadas esféricas está dada por

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \cos \phi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (31)$$

El autoestado del hamiltoniano asociado a una partícula de espín 1/2 en un campo magnético, correspondiente al autovalor de energía positiva  $+\epsilon$ , dada en la ecuación (17) puede ser expresado en coordenadas esféricas. Para realizar la transformación de la ecuación (17) a coordenadas a ese tipo, se requiere la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \lambda_x(t) &= \cos \phi \sin \theta, \\ \lambda_y(t) &= \sin \phi \sin \theta, \\ \lambda_z(t) &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Teniendo en cuenta la transformación expresada en las ecuaciones (32), se obtiene

$$1 + \lambda_z(t) = 1 + \cos \theta, \quad \lambda_x(t) + i\lambda_y(t) = e^{i\phi} \sin \theta, \quad (33)$$

si se consideran las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos(\theta/2) &= (1 + \cos \theta)^{1/2}, & \sin \theta &= 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2), \\ \cos^2(\theta/2) &= \frac{1 + \cos \theta}{2}, & \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^{1/2}} &= \sqrt{2} \sin(\theta/2), \end{aligned} \quad (34)$$

después de sustituir las ecuaciones (33) y (34) en la ecuación (17) se obtiene la expresión para el qubit en coordenadas esféricas

$$\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (35)$$

La forma alterna del qubit que fue propuesta en la ecuación (30), también admite su correspondiente expresión en coordenadas esféricas. Con la ayuda de las siguientes identidades y algunas de las mencionadas en (34)

$$\sqrt{2} \sin(\theta/2) = (1 - \cos \theta)^{1/2}, \quad \sin^2(\theta/2) = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad (36)$$

se obtiene

$$\left| \psi_+^{(2)}(t) \right\rangle = \cos(\theta/2) e^{-i\phi} |0\rangle + \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (37)$$

El operador de proyección en coordenadas esféricas toma la forma

$$\hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & e^{-i\phi} \sin \theta/2 \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \cos \theta/2 & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

y satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) \} &= 1, & \det \{ \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) \} &= 0, \\ \hat{P}_+^2(\boldsymbol{\lambda}(t)) &= \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)), & \hat{P}_+(\boldsymbol{\lambda}(t)) &= \hat{P}_+^\dagger(\boldsymbol{\lambda}(t)). \end{aligned} \quad (39)$$

Las propiedades en (39) muestran que el operador de proyección es un elemento de una variedad de Grassman [6].

## 6. El potencial gauge

La evolución de los estados en la mecánica cuántica es mediada por la ecuación de Schrödinger, la solución de la ecuación de evolución en la aproximación adiabática está dada por

$$\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = e^{i\delta_1(t)} e^{i\gamma_1(t)} \left| \psi_+^{(1)}(0) \right\rangle, \quad (40)$$

en esta aproximación, el estado del sistema realiza una evolución cíclica entre  $t = 0$  y  $t = T$ , el estado final está relacionado con el estado inicial vía el producto de dos operadores unitarios [1].

El ket  $\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle$  dado en la ecuación (40) es un autoestado del hamiltoniano (3), la primera exponencial es la fase dinámica, en ella está toda la información dinámica del sistema en cuestión y está dada por

$$\delta_1 = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \left\langle \psi_+^{(1)}(t) \left| \hat{H} \right| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle dt. \quad (41)$$

La segunda exponencial corresponde a la fase geométrica, esta fase es la integral del potencial *gauge* [1], sobre un ciclo en el espacio de parámetros de los cuales depende el hamiltoniano, está dada por

$$\gamma_1 = i \int_0^T \left\langle \psi_+^{(1)}(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle dt. \quad (42)$$

La ecuación (42) se puede expresar como una integral cerrada sobre la trayectoria  $C$  seguida por el autoestado del hamiltoniano (3) a lo largo de su evolución, de la siguiente manera

$$\gamma_1 = i \oint_C \left\langle \psi_+^{(1)}(t) \left| d \right| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle. \quad (43)$$

En los siguientes párrafos se considera solamente la parte geométrica de la evolución. Existen procedimientos teóricos [6] y experimentales [2] que muestran la posibilidad de separar la parte geométrica de la parte dinámica en un mismo experimento, esta separación conduce naturalmente a la implementación de experimentos físicos donde se pueden medir algunos aspectos geométricos, la computación cuántica no es por tanto ajena a esos propósitos y ha mostrado la manera de hacer realizaciones experimentales de compuertas lógico-cuánticas utilizando solamente aspectos geométricos [5].

El integrando de la ecuación (42) corresponde al potencial *gauge*, el cual está dado por

$$A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t)) d\lambda_a = i \left\langle \psi_+^{(1)}(t) \left| d \right| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle. \quad (44)$$

Un calculo directo donde se usa la 1-forma diferencial  $d$ , la cual corresponde a un operador de evolución temporal y el qubit representado en la ecuación (17), permite obtener

$$d \left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda_z(t))}} \left[ \frac{d\lambda_z}{2} |0\rangle - \left[ \frac{\lambda_x(t) + i\lambda_y(t)}{2(1+\lambda_z(t))} d\lambda_z - (d\lambda_x + i d\lambda_y) \right] |1\rangle \right]. \quad (45)$$

La sustitución de la ecuacion (45) para el diferencial del qubit y (18) para el dual del qubit, en la ecuación para la conexión (potencial *gauge*) que aparece en la

expresión (44), después de usar las condiciones de ortormalización para los estados base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  conduce a

$$A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = \frac{i}{2\sqrt{(1+\lambda_z(t))}} \left[ \frac{\sqrt{1+\lambda_z(t)}}{2}d\lambda_z - \frac{\lambda_x(t) - i\lambda_y(t)}{\sqrt{1+\lambda_z(t)}} \left[ \frac{\lambda_x(t) + i\lambda_y(t)}{2(1+\lambda_z(t))}d\lambda_z - (d\lambda_x + id\lambda_y) \right] \right]. \quad (46)$$

El vector de Bloch  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  al ser un vector unitario satisface la ecuación (14), al tomar la diferencial de esta ecuación se encuentra que

$$\lambda_z(t)d\lambda_z = -(\lambda_x(t)d\lambda_x + \lambda_y(t)d\lambda_y), \quad (47)$$

al sustituir las ecuaciones (14) y (47) en la expresión (46) para la 1-forma conexión (potencial *gauge*) se obtiene

$$A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = \frac{-i}{2(1+\lambda_z(t))}(\lambda_x(t)d\lambda_y - \lambda_y(t)d\lambda_x), \quad (48)$$

donde esta última ecuación tiene una singularidad en  $\lambda_z(t) = -1$ .

La ecuación (48) tiene su correspondiente representación en coordenadas esféricas. Si se toman los diferenciales de las ecuaciones de transformación a coordenadas esféricas de las ecuaciones (32), se deduce que

$$\begin{aligned} d\lambda_x &= \cos\phi \cos\theta d\theta - \sin\phi \sin\theta d\phi, & d\lambda_y &= \sin\phi \cos\theta d\theta + \cos\phi \sin\theta d\phi, \\ d\lambda_z &= -\sin\theta d\theta, \end{aligned} \quad (49)$$

si las expresiones (49) se sustituyen en la ecuación (48) se obtiene

$$A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = -\frac{i}{2}(1 - \cos\theta)d\phi. \quad (50)$$

La singularidad  $\lambda_z(t) = -1$  de la expresión (48) corresponde a la singularidad  $\theta = \pi$  en el polo sur de su homóloga en coordenadas esféricas (ecuación (50)).

Una expresión equivalente a la obtenida en (50) para el potencial *gauge* proveniente del qubit expresado en la ecuación (37) puede obtenerse a partir de

$$A_+^{a,2}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = i \left\langle \psi_+^{(2)}(t) \left| d \right| \psi_+^{(2)}(t) \right\rangle. \quad (51)$$

Por un procedimiento completamente similar al desarrollado hasta obtener la ecuación (48), se deduce la correspondiente expresión para el potencial *gauge* asociado al qubit alternativo, esta nueva forma de qubit ha sido representada en la ecuación (30), si se reemplaza esta expresión junto con su correspondiente diferencial en la expresión (51), se obtiene para la 1-forma conexión (potencial *gauge*)

$$A_+^{a,2}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = \frac{i}{2(1-\lambda_z(t))}(\lambda_x(t)d\lambda_y - \lambda_y(t)d\lambda_x), \quad (52)$$

donde esta última ecuación tiene una singularidad en  $\lambda_z(t) = 1$ . Su correspondiente representación en coordenadas esféricas es

$$A_+^{a,2}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = \frac{i}{2}(1 + \cos\theta)d\phi. \quad (53)$$

La singularidad  $\lambda_z(t) = 1$  de la expresión (52) corresponde a la singularidad  $\theta = 0$ , polo norte de su homóloga en coordenadas esféricas (ecuación (53)).

Los autoestados del hamiltoniano (3) correspondientes a las ecuaciones (35) y (37) son las expresiones del qubit en la computación cuántica para este modelo en particular. De otro lado, las ecuaciones (50) y (53) para los potenciales *gauge* no están definidas sobre toda la esfera de Bloch, cada una de ellas tiene una singularidad puntual tanto en el polo sur como en el polo norte respectivamente, pero su diferencia dada por

$$dW = A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a - A_+^{a,2}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = \frac{-i}{1 - \lambda_z(t)^2}(\lambda_x(t)d\lambda_y - \lambda_y(t)d\lambda_x), \quad (54)$$

es un *gauge* puro en  $\lambda_z(t) = 0$ , es decir, en el ecuador donde  $\lambda_x(t)^2 + \lambda_y(t)^2 = 1$

$$dW = A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a - A_+^{a,2}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = -i(\lambda_x(t)d\lambda_y - \lambda_y(t)d\lambda_x). \quad (55)$$

En coordenadas esféricas la ecuación (55) se convierte en

$$dW = -i \sin^2 \theta d\phi. \quad (56)$$

La región donde la transformación (56) es un *gauge* puro es justamente la circunferencia  $S^1$ , esta región coincide con la frontera de los dos hemisferios norte y sur, en donde están definidos los potenciales *gauge* de las ecuaciones (50) y (53) respectivamente.

## 7. La fase de Berry del qubit

La expresión para la fase de Berry se obtiene a partir de las ecuaciones (43) y (44). En el presente contexto toma la forma

$$\gamma_1(C) = \oint_C A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a. \quad (57)$$

Al usar la expresión para el potencial *gauge* dada en la ecuación (48) y después de sustituir ésta en la ecuación (57) se obtiene para la fase de Berry del qubit dado en la ecuación (16) que

$$\gamma_1(C) = -i \oint_C \frac{(\lambda_x(t)d\lambda_y - \lambda_y(t)d\lambda_x)}{2(1 + \lambda_z(t))}, \quad (58)$$

La exponencial de la fase Berry corresponde a un elemento del grupo de Lie  $U(1)$ .

Una expresión equivalente se obtiene para el qubit dado en la ecuación (29) al tener en cuenta el potencial *gauge* dado en la ecuación (52)

$$\gamma_2(C) = i \oint_C \frac{(\lambda_x(t)d\lambda_y - \lambda_y(t)d\lambda_x)}{2(1 - \lambda_z(t))}. \quad (59)$$

## 8. La fase de Berry como una compuerta de fase

Como una aplicación del cálculo de la fase de Berry en una situación particular, se calcula la fase de Berry (fase geométrica) asociada al qubit y a partir de dicho cálculo se construye una compuerta de fase de mucha utilidad para la computación cuántica. La situación consiste como ha sido mencionado en una partícula de espín 1/2 localizada en un campo magnético externo dado por  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ . Si es posible controlar los parámetros  $\boldsymbol{\lambda}$  de los cuales depende el hamiltoniano del sistema, entonces es

posible realizar mediante una evolución adiabática una evolución cíclica con los autoestados del hamiltoniano y luego calcular la fase de Berry asociada.

El hamiltoniano dependiente del tiempo el cual describe la situación mencionada está dado por

$$\hat{H} = \epsilon' \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \hat{\sigma}. \quad (60)$$

El campo magnético consiste de dos componentes  $\lambda_x(t)$  y  $\lambda_y(t)$  las cuales son perturbaciones típicamente oscilantes y una tercera componente la cual  $\lambda_z(t)$  está descrita por un campo magnético constante. En general la perturbación es periódica y las componentes del campo magnético  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  están definidas por las ecuaciones

$$\lambda_x(t) = B \cos(\omega t + \phi), \quad \lambda_y(t) = B \sin(\omega t + \phi), \quad \lambda_z(t) = B_0, \quad (61)$$

donde  $B_0/2\pi$  es la frecuencia de transición del sistema,  $\omega$  es la frecuencia con la cual oscilan las componentes  $x, y$  del campo magnético,  $B$  es la amplitud del campo oscilante y  $\phi$  es la fase inicial. La representación matricial del hamiltoniano dependiente del tiempo de una partícula de espín 1/2 inmerso en un campo magnético está dada por

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} B_0 & B e^{-i(\omega t + \phi)} \\ B e^{i(\omega t + \phi)} & -B_0 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

El autoestado del hamiltoniano (62) designado como el qubit, correspondiente al autovalor de energía positiva dado en la ecuación (16) al ser parametrizado en términos de la ecuación (61), toma la forma

$$\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+B_0)}} \begin{pmatrix} 1+B_0 \\ B e^{i(\omega t + \phi)} \end{pmatrix}. \quad (63)$$

La normalización del estado (63) implica que  $B_0^2 + B^2 = 1$ , a su vez este resultado se corresponde con la ecuación (14).

Para resolver el problema de encontrar la fase de Berry asociada al qubit de la ecuación (63) y a partir de ella construir una compuerta de fase geométrica como un dispositivo de utilidad en la computación cuántica, es más conveniente describir una situación en el cual el vector de Bloch rota a frecuencia  $\omega$  alrededor del eje  $z$  (aproximación de onda rotante). La situación mencionada se consigue al transformar el campo magnético dependiente del tiempo de la ecuación (61) en un campo magnético independiente del tiempo [2]

$$\lambda'_x(t) = B \cos \phi, \quad \lambda'_y(t) = B \sin \phi, \quad \lambda'_z(t) = B_0 - \frac{\omega}{\gamma}, \quad (64)$$

donde  $\gamma$  es la razón giromagnética [4]. Si es posible controlar la intensidad del campo magnético aplicado  $B$ , la frecuencia de oscilación  $\omega$  y su fase  $\phi$ , es posible preparar el estado que se obtiene después de substituir (64) en la ecuación (16) para el qubit

$$\left| \psi_+^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+B_0-\gamma'\omega)}} \begin{pmatrix} 1+B_0-\gamma'\omega \\ B e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (65)$$

donde  $\gamma' = 1/\gamma$ . Para la presente situación en la cual la hipótesis de la evolución adiabática es válida, al preparar el sistema de tal forma que el vector de Bloch y el campo magnético estén alineados en el instante inicial, el teorema adiabático garantiza que ambos permanecerán alineados en cualquier otro instante del tiempo y será

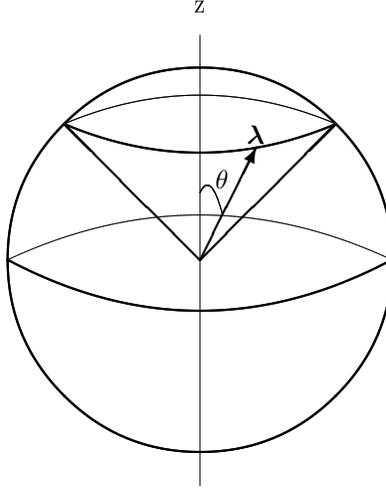


Figura 1: Ángulo entre el campo magnético y el eje  $z$  en el tiempo  $t$ .

posible ubicar al qubit en una dirección preescrita. Con ello es posible implementar una compuerta de fase geométrica. Para implementar la compuerta mencionada es necesario desarrollar la integral en la ecuación (57). El potencial *gauge* expresado por el integrando de la ecuación (57) después de la parametrización realizada en la ecuación (65) toma la forma

$$A_+^{a,1}(\boldsymbol{\lambda}(t))d\lambda_a = i \frac{B^2}{2(1 + B_0 - \gamma'\omega)} d\phi. \quad (66)$$

Al sustituir la ecuación (66) en la ecuación (57) y después de utilizar la condición de normalización para el qubit de la ecuación (65) se obtiene

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2}[1 - (B_0 - \gamma'\omega)] \oint_C d\phi. \quad (67)$$

Es posible a partir de la intensidad, de la frecuencia y de la fase inicial del campo magnético oscilante, controlar los parámetros de un sistema de coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$  asociadas al espacio de parámetros  $\boldsymbol{\lambda}'(t)$  del sistema rotante. Las coordenadas esféricas en esta situación particular pueden definirse como

$$\text{sen } \theta = B, \quad \text{cos } \theta = B_0 - \gamma'\omega, \quad \phi = \varphi. \quad (68)$$

En términos de la parametrización del campo oscilante es posible calcular la integral de la ecuación (67) de la siguiente manera. Si la intensidad del campo oscilante inicialmente es igual a cero, tanto el vector de Bloch como el campo magnético están en la dirección del eje  $z$ , a medida que la amplitud del campo oscilante se incrementa adiabáticamente desde cero hasta algún valor  $B$ , el campo magnético y el vector de Bloch tienden hacia el plano  $xy$ , en cualquier instante del tiempo el ángulo que hace el vector de Bloch con el eje  $z$  está dado por la coordenada esférica  $\theta$  de la figura (1). En términos de la intensidad de campo magnético  $B$ , del campo magnético en la dirección del eje  $z$   $B_0$  y de la frecuencia de oscilación del campo  $\omega$ , el ángulo  $\theta$  está dado por

$$\cos \theta = \frac{\lambda'_z(t)}{\sqrt{\lambda'^2_x + \lambda'^2_y + \lambda'^2_z}} = \frac{B_0 - \gamma'\omega}{\sqrt{(B_0 - \gamma'\omega)^2 + B^2}} = B_0 - \gamma'\omega. \quad (69)$$

Variando la fase  $\phi$  entre  $[0, 2\pi)$  del campo oscilante alrededor del eje  $z$ , se puede obtener la fase geométrica asociada a una partícula de espín  $1/2$  en un campo magnético, al realizar una evolución cíclica en el espacio de parámetros. De la tercera de las ecuaciones (68) se deduce que  $d\varphi = d\phi$ . Con este resultado la integral (67) puede expresarse

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2}[1 - (B_0 - \gamma'\omega)] \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad (70)$$

de lo cual se deduce finalmente que

$$\gamma(C) = -\pi[1 - (B_0 - \gamma'\omega)]. \quad (71)$$

La fase geométrica es igual a la mitad del ángulo sólido encerrado por el camino  $C$  efectuado por el autoestado de energía positiva asociado al hamiltoniano (62)

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2}\Omega. \quad (72)$$

El resultado de la ecuación (71) permite implementar una compuerta de corrimiento de fase o compuerta de fase, como se abrevia usualmente en la computación cuántica. La matriz que representa la compuerta de fase en la base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  de la computación cuántica, se obtiene transformando los estados de la base computacional de la siguiente manera

$$|0\rangle \mapsto |0\rangle \quad |1\rangle \mapsto e^{i\gamma(C)} |1\rangle, \quad (73)$$

donde  $\gamma(C)$  está dada por la ecuación (71). La representación matricial y su diagrama correspondiente son expresados mediante

$$\Gamma(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma(C)} \end{pmatrix} \quad |x\rangle \xrightarrow{\bullet} e^{ix\gamma(C)} |x\rangle \quad (74)$$

donde  $x \in \{0, 1\}$  [2].

## 9. Conclusiones

La fase de Berry en el presente contexto se atribuye a la evolución cíclica de un autoestado de un hamiltoniano asociado a una partícula de espín  $1/2$  en mutua interacción con un campo magnético clásico. La evolución del autoestado (qubit) satisface los requerimientos del teorema adiabático. Las técnicas descritas en este trabajo constituyen una forma novedosa de realización de una compuerta lógico-cuántica, la cual se basa fundamentalmente en aspectos geométricos. La descripción desde el punto de vista físico-matemático no es nueva, corresponde a la descripción del monopolo de Dirac, pero ella ayuda a aclarar algunas nociones las cuales no son del todo claras en el contexto de la computación cuántica. La implementación física asociada al modelo ha sido realizada en experimentos de **NMR** [2, 5].

## 10. Agradecimientos

Este artículo fue financiado por la universidad EAFIT, bajo el proyecto de investigación número 817431. Agradecemos al profesor Carlos Cadavid las múltiples conversaciones sostenidas y las aclaraciones realizadas al rededor de algunos de los tópicos desarrollados en el presente artículo.

## Referencias

- [1] M. V. BERRY. Quantal phase factor accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45–57 (1984).
- [2] ARTUR EKERT ET AL. Geometric quantum computation. *J. Mod. Optic.* **47**(14/15), 2501–2513 (2000).
- [3] A. GALINDO Y P. PASCUAL. “Mecánica cuántica”. Madrid: Editorial Alhambra, S.A. (1978).
- [4] N. GERSHENFELD Y ISAAC. L. CHUANG. Bulk spin resonance quantum computation. *Science* **275**, 350 (january 1997).
- [5] JONATHAN JONES ET AL. Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance. *Nature* **403**(6772), 869–871 (24 february 2000).
- [6] MIKIO NAHAKARA. “Geometry, Topology and Physics”. Philadelphia: Institute of Physics Publishing (1990).