Teoría de Categorías y Estructuras de Restricción

José Ramírez-Gómez

Universiad EAFIT

Septiembre 2024

¿Qué es la teoría de categorías?

La teoría de categorías es una rama de las matemáticas que:

- Estudia conexiones entre diferentes ideas.
- Permite entender el orden y las estructuras.
- Se centra en las relaciones.
- Permite ver bajo qué contexto las cosas son equivalentes.

¿Qué es la teoría de categorías?

Figure: Broma

Diagramas conmutativos

Idea

Un diagrama conmutativo es un diagrama en el cual todos los caminos que comiencen y terminen en el mismo lugar determinan el mismo resultado.

Ejemplo

$$\begin{tikzcd}
\text{Marinilla} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Rionegro} \arrow[d] \\
\text{Guarne} \arrow[r] & \text{Medellín}
\end{tikzcd}$$

¿Qué es una categoría?

Informalmente, una categoría, que denotamos como $\mathcal{C}$, está formada por:

- **Objetos:** Pueden ser números, formas, estructuras matemáticas, o personas. Usualmente denotamos los objetos con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$.
- **Flechas:** Denotan relación entre los objetos: "menor que", "es madre de", "es isomorfo a". Denotamos las flechas con diagramas $A \xrightarrow{f} B$.
- **Identidad:** Cada objeto está relacionado con él mismo. Es decir, para cada objeto A hay una flecha $A \xrightarrow{1_A} A$.
- **Composición:** Para cada par de flechas $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ debe existir una flecha $A \xrightarrow{h} C$.

¿Qué es una categoría?

- **Ley de identidades:** La flecha identidad asociada a cada objeto hace que los siguientes diagramas sean conmutativos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

- **Ley asociativa:** Cada terna de flechas con la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ debe hacer que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

Ejemplo: Números naturales

Partiendo de los números naturales, podemos construir una categoría de la siguiente forma

- **Objetos:** Números naturales $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- **Flechas:** $A \longrightarrow B$ siempre y cuando $A \leq B$.
- **Identidad:** Todo número natural es menor o igual que él mismo.

¿Cómo se vería esta categoría?

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[r, bend right] \arrow[rr, bend right] \arrow[rrr, bend right] \arrow[rrrr, bend right] & 1 \arrow[loop above] \arrow[r] & 2 \arrow[loop above] \arrow[r] & 3 \arrow[loop above] \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: Set

Set es la categoría cuyos objetos son conjuntos y sus flechas son funciones entre conjuntos. En esta categoría

- **Flecha identidad:** Es la función identidad

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_X : X &\to X \\
x &\mapsto x
\end{aligned}
$$

- **Composición:** Es la composición de funciones. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos funciones, luego

$$
\begin{aligned}
g \circ f : X &\to Z \\
x &\mapsto g(f(x))
\end{aligned}
$$

  es su función composición.

Otros ejemplos

- Vect: Los objetos son espacios vectoriales y los morfismos son transformaciones lineales.
- Pos: Los objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones monótonas.
- Top: Los objetos son espacios topológicos y los morfismos son los mapeos continuos.
- Grp: Los objetos son grupos y los morfismos son homomorfismos de grupos.

Restricción de una función

Función de inclusión

Sea A un conjunto. Todo subconjunto $S \subseteq A$ define una función de inclusión $S \hookrightarrow A$ que envía cada $s \in S$ en $s \in A$.

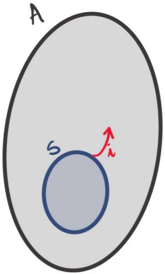

Figure: Idea de la función de inclusión

Restricción de una función

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función del conjunto X en el conjunto Y. Si W es un subconjunto de X, entonces la restricción de f respecto a A es la función

$$f|_W : W \to Y$$

dada por $f|_W(x) \mapsto f(x)$.

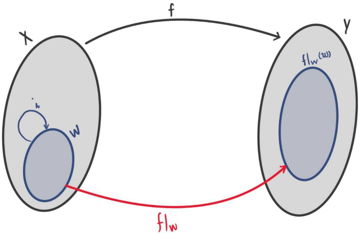

Figure: Idea de la restricción de una función

¿Podemos extender esta idea a una categoría?

Categorías restrictivas

Restricción (categoría)

Una restricción en una categoría $\mathcal{C}$ es un asignación de una flecha $\bar{f} : A \to A$ para cada flecha $f : A \to B$ tal que

- Para toda f en $\mathcal{C}$, $f \circ \bar{f} = f$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Categorías restrictivas

- Para toda $f : A \to B$ y $g : A \to C$, $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{g} \circ \bar{f}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & A \arrow[d, "\bar{g}"] \\
A \arrow[r, "\bar{f}"'] & A
\end{tikzcd}
$$

- Para toda $f : A \to B$ y $g : A \to C$, $\overline{g \circ \bar{f}} = \bar{g} \circ \bar{f}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\overline{g\bar{f}}"'] & A \arrow[d, "\bar{g}"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

Categorías restrictivas

- Para toda $f : A \to B$ y $g : B \to C$, $\bar{g} \circ f = f \circ \overline{g \circ f}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{g \circ f}"'] & B \arrow[d, "\bar{g}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Categoría restrictiva

Una categoría restrictiva es una categoría $\mathcal{C}$ junto a una estructura de restricción.

Categorías restrictivas

Notas

- Es importante tener en cuenta que la estructura de restricción no es una propiedad de la categoría. Una categoría puede tener más de una estructura de restricción.
- Toda categoría tiene al menos una estructura de restricción. Si tomamos $\bar{f} = 1$ como le restricción de cada flecha obtenemos la estructura de restricción trivial.

¿Para qué sirve todo esto?

¡GRACIAS!

¿Qué es una categoría?

Definición (Categoría)

Una categoría $\mathcal{C}$ *está compuesta de:*

- *Una colección de objetos,* $Obj(\mathcal{C})$*, que denotaremos con las letras* A, B, C*, etc.*
- *Una colección de flechas o morfismos,* $Mor(\mathcal{C})$*, que denotaremos con las letras* f, g, h*, etc.*
- *Dos mapeos,* $dom, cod : Mor(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{C})$*, que asignan a cada flecha* f *su dominio* $dom(f)$ *y codominio* $cod(f)$*. Para una flecha* f *con dominio* A *y codominio* B *escribiremos* $f : A \to B$*. Y para cada par de objetos* A, B *definimos el conjunto*

$$\mathcal{C}(A, B) := \{f \in Mor(\mathcal{C}) \mid f : A \to B\}$$

al que llamaremos Hom-set y también escribiremos como $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$*.*

¿Qué es una categoría?

Definición (Categoría)

- *Para cualquier terna de objetos A, B, C, la composición de morfismos,*

$$C_{A,B,C} : \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C).$$

Dados $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$, escribiremos $g \circ f$ para denotar $C_{A,B,C}(f,g)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

- *Para cada objeto A, una flecha identidad, $\mathbf{1}_A : A \to A$.*

¿Qué es una categoría?

Definición (Categoría)

Tales que se satisfagan los siguientes axiomas:

- *Asociatividad: para cualesquiera morfismos* $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, *se cumple que*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

¿Qué es una categoría?

Definición (Categoría)

- *Identidades: para cualquier morfismo* $f : A \to B$ *se cumple que*

$$f \circ \mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B \circ f.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f \circ 1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "1_B \circ f"] & \\
 & B \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: Set

Set es la categoría cuyos objetos son conjuntos y sus morfismos son funciones entre conjuntos. En esta categoría

- **Flecha identidad:** Es la función identidad

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- **Composición:** Es la composición de funciones. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos funciones, luego

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

  es su función composición.

Otros ejemplos

- Vect: Los objetos son espacios vectoriales y los morfismos son transformaciones lineales.
- Pos: Los objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones monótonas.
- Top: Los objetos son espacios topológicos y los morfismos son los mapeos continuos.
- Grp: Los objetos son grupos y morfismos son homomorfismos de grupos.

¿Qué es un functor?

Definición (Functor)

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *está dado por:*

- *Un mapeo de objetos, que asigna un objeto* FA *en* $\mathcal{D}$ *a cada objeto* A *de* $\mathcal{C}$.
- *Un mapeo de flechas que asigna un morfismo* $Ff : FA \to FB$ *en* $\mathcal{D}$ *a cada morfismo* $f : A \to B$ *en* $\mathcal{C}$ *de tal forma que se preserven las identidades y composiciones, es decir:* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *y* $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Ejemplo

Definición (Imagen directa)

Sea $f : X \to Y$ una función y $A \subseteq X$ un subconjunto de X, la imagen directa de X bajo f es el conjunto $f[X] \subseteq Y$ que tiene a todos los elementos de Y iguales a $f(x)$ para alguna $x \in A$:

$$f[A] := \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para } x \in A\}$$

▲

El functor potencia

En Set podemos definir el (endo)functor potencia $\mathcal{P} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ cuyo mapeo de objetos envía un objeto X a su conjunto potencia $\mathcal{P}X$ y el mapeo de morfismos envía una función $f : X \to Y$ a la imagen directa de $S \subseteq X$ bajo f, $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$.

¿Qué es una transformación natural?

Definición (Transformación natural)

Dados dos functores $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, *una transformación natural* $\alpha : S \Rightarrow T$ *es un morfismo que asigna a cada objeto* c *de* $\mathcal{C}$ *una flecha* $\alpha_c : Sc \to Tc$ *de* $\mathcal{D}$ *de tal forma que para cada flecha* $f : c \to c'$ *en* $\mathcal{C}$ *el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Sc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ c' & Sc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Tc' \end{tikzcd}$$

es conmutativo. ▲

¿Qué es una transformación natural?

Intuición

Si pensamos en los functores S y T como "proyecciones" de la "imagen" de una categoría sobre otra, entonces una transformación natural es un conjunto de flechas que de cierta forma "traduce" una imagen en otra.

¿Qué es una mónada?

Broma 1.1

Una mónada es un burrito.

Definición (Mónada)

Una mónada $T = (T, \eta, \mu)$ *en una categoría* $\mathcal{C}$ *consiste de un endofunctor* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *y dos transformaciones naturales* $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$ *y* $\mu : T^2 \Rightarrow T$ *tales que los siguientes diagramas son conmutativos*

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "1"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

▲

Ejemplo

Consideremos nuevamente el endofunctor potencia $\mathcal{P} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$. Sean $\eta_Y : Y \Rightarrow \mathcal{P}(Y)$ la operación de singleton

$$\eta_Y(y) = \{y\}$$

y $\mu_Y : \mathcal{P}\mathcal{P}(Y) \Rightarrow \mathcal{P}(Y)$ la operación de unión

$$\mu_Y(\gamma) = \bigcup \gamma$$

Como η y μ son transformaciones naturales, entonces la terna $(\mathcal{P}, \{-\}, \bigcup)$ es una mónada en la categoría Set.

¿Qué es una categoría monoidal?

Definición (Categoría monoidal)

Una categoría monoidal $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ *es una categoría* $\mathbf{B}$*, un bifunctor* $\otimes : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \to \mathbf{B}$*, un objeto* $e \in \mathbf{B}$ *y tres transformaciones naturales* α, λ, ρ*. De forma explicita*

$$\alpha : a \otimes (b \otimes c) \cong (a \otimes b) \otimes c$$

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1\otimes\alpha"] & (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[r, "\alpha"] & ((a \otimes b) \otimes c) \otimes d \\
a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[rr, "\alpha"'] & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[u, "\alpha\otimes 1"]
\end{tikzcd}$$

Referencias I

S. Abramsky and N. Tzevelekos.
Introduction to Categories and Categorical Logic, page 3–94.
Springer Berlin Heidelberg, 2010.

S. Awodey.
Category Theory.
Oxford Logic Guides. OUP Oxford, 2010.

E. Cheng.
The joy of abstraction: An exploration of math, category theory, and life.
Cambridge University Press, 2022.

J. R. B. Cockett and S. Lack.
Restriction categories i: categories of partial maps.
Theoretical computer science, 270(1-2):223–259, 2002.

Referencias II

D. DeWolf.

Restriction category perspectives of partial computation and geometry.

2017.

T. Leinster.

Basic category theory, 2016.

S. Mac Lane.

Categories for the working mathematician, volume 5.

Springer Science & Business Media, 2013.

E. Moggi.

Notions of computation and monads.

Information and computation, 93(1):55–92, 1991.

Referencias III

P. Wadler.
Monads for functional programming.
In *Advanced Functional Programming: First International Spring School on Advanced Functional Programming Techniques Båstad, Sweden, May 24–30, 1995 Tutorial Text 1*, pages 24–52. Springer, 1995.