ST0270 Lenguajes Formales y Compiladores
Máquinas de Turing

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2024-1

(Última actualización: 25 de julio de 2025)

Preliminares

Referencias

Las referencias principales para estas diapositivas son (Kozen 2012, Lecturas 28 y 29).

Convenciones

(i) Los números asignados a los definiciones, ejemplos, ejercicios, páginas y teoremas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en (Kozen 2012).

(ii) Los números naturales incluyen el cero, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(iii) El conjunto potencia de un conjunto A es denotado 2^A.

(iv) Los términos «definición inductiva» y «definición recursiva» se usan como sinónimos.

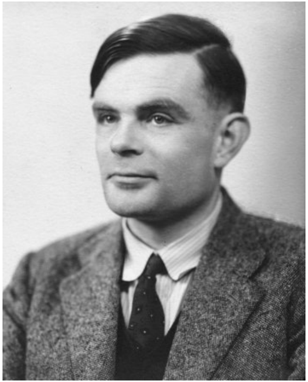
Introducción

Correspondencia entre las gramáticas y los modelos de computación

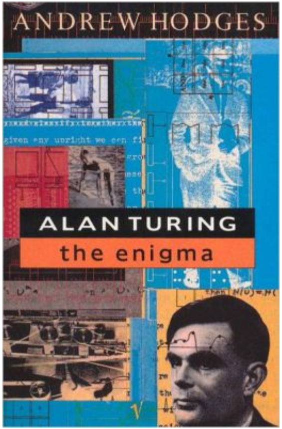
Un tipo de gramática genera una clase de lenguajes y un modelo de computación reconoce una clase de lenguajes.

Tipo de gramática	Clase de lenguaje	Modelo de computación
3	Regulares	Autómatas finitos
2	Libres de contexto	Autómatas a pila
1	Dependientes del contexto	Autómatas linealmente acotados
0	Recursivamente enumerables	Máquinas de Turing

Introducción



Alan Mathison Turing
(1912 – 1954)



Computabilidad: Algunos hitos históricos

1900 Problemas de David Hilbert
Wir müssen wissen — wir werden wissen!
(Debemos saber, sabremos)

Introducción

Computabilidad: Algunos hitos históricos

1900 Problemas de David Hilbert
Wir müssen wissen — wir werden wissen!
(Debemos saber, sabremos)

1931 Teoremas de incompletitud de Kurt Gödel

Introducción

Computabilidad: Algunos hitos históricos

1900 Problemas de David Hilbert
Wir müssen wissen — wir werden wissen!
(Debemos saber, sabremos)

1931 Teoremas de incompletitud de Kurt Gödel

1934-1937 Computación efectiva

- Derivabilidad a partir de un sistema de ecuaciones (Kurt Gödel, Jacques Herbrand)
- Cálculo Lambda (Alonzo Church, Stephen C. Kleene, J. Barkley Rosser)
- Funciones recursivas (Kurt Gödel, Stephen C. Kleene)
- Máquinas de Post (Emil L. Post)
- Máquinas de Turing (Alan M. Turing)

(continua en la próxima diapositiva)

Introducción

Computabilidad: Algunos hitos históricos

1936–40 La tesis de Church-Turing-Kleene: Una función numérico-teórica es efectivamente calculable, si y solo si, es computable por una máquina de Turing.

Introducción

Computabilidad: Algunos hitos históricos

1936–40 La tesis de Church-Turing-Kleene: Una función numérico-teórica es efectivamente calculable, si y solo si, es computable por una máquina de Turing.

1985 Máquinas de Turing cuánticas (David Deutsch)

Introducción

Computabilidad: Algunos hitos históricos

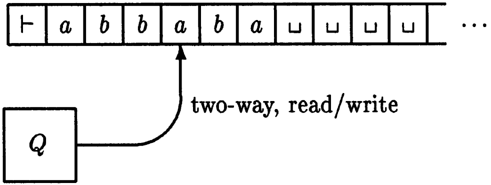
1936–40 La tesis de Church-Turing-Kleene: Una función numérico-teórica es efectivamente calculable, si y solo si, es computable por una máquina de Turing.

1985 Máquinas de Turing cuánticas (David Deutsch)

1940–hoy Varios modelos equivalentes de computación

Máquinas de Turing

Descripción informal



(Fig. pág 210)

Definición de las máquinas de Turing

Definición

Una **máquina de Turing determinista** (MT) (*deterministic Turing machine*) es una estructura

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r),$$

donde

(i) Q es un conjunto finito, los **estados**,

(ii) Σ es un conjunto finito, el **alfabeto de entrada**,

(iii) Γ es un conjunto finito, el **alfabeto de la pila**, $\Sigma \subseteq \Gamma$,

(iv) $\vdash \in \Gamma - \Sigma$, el símbolo de **fin a la izquierda**,

(v) $\sqcup \in \Gamma - \Sigma$, el símbolo de **espacio en blanco**,

(vi) $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, la **relación de transición**,

(continua en la próxima diapositiva)

Definición de las máquinas de Turing

Definición (continuación)

(vii) $s \in Q$, el **estado inicial**,

(viii) $t \in Q$, el **estado de aceptación**,

(ix) $r \in Q$, el **estado de rechazo**, $t \neq r$,

Definición de las máquinas de Turing

Definición (continuación)

(vii) $s \in Q$, el **estado inicial**,

(viii) $t \in Q$, el **estado de aceptación**,

(ix) $r \in Q$, el **estado de rechazo**, $t \neq r$,

sujeta a las siguientes restricciones y convenciones:

(i) para todo $p \in Q$, existe $q \in Q$ tal que,

$$\delta(p, \vdash) = (q, \vdash, R),$$

(ii) para todo $b \in \Gamma$, existen $c, c' \in \Gamma$ y $d, d' \in \{L, R\}$ tales que,

$$\delta(t, b) = (t, c, d),$$
$$\delta(r, b) = (r, c', d').$$

Definición de las máquinas de Turing

Ejemplo

La máquina de Turing $(Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ acepta el lenguaje *no* libre de contexto $\{\, a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \,\}$, donde $Q = \{s, q_1, \ldots, q_{10}, t, r\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\vdash, \sqcup, \dashv\}$ y la relación de transición δ está dada por la siguiente tabla:

(continua en la próxima diapositiva)

Definición de las máquinas de Turing

Ejemplo (continuación)

	$\vdash$	a	b	c	$\sqcup$	$\dashv$
s	$(s,\vdash,R)$	(s,a,R)	(q_1,b,R)	(q_2,c,R)	$(q_3,\dashv,L)$	$-$
q_1	$-$	$(r,-,-)$	(q_1,b,R)	(q_2,c,R)	$(q_3,\dashv,L)$	$-$
q_2	$-$	$(r,-,-)$	$(r,-,-)$	(q_2,c,R)	$(q_3,\dashv,L)$	$-$
q_3	$(t,-,-)$	$(r,-,-)$	$(r,-,-)$	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$-$
q_4	$(r,-,-)$	$(r,-,-)$	$(q_5,\sqcup,L)$	(q_4,c,L)	$(q_4,\sqcup,L)$	$-$
q_5	$(r,-,-)$	$(q_6,\sqcup,L)$	(q_5,b,L)	$-$	$(q_5,\sqcup,L)$	$-$
q_6	$(q_7,\vdash,R)$	(q_6,a,L)	$-$	$-$	$(q_6,\sqcup,L)$	$-$
q_7	$-$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(r,-,-)$	$(r,-,-)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(t,-,-)$
q_8	$-$	(q_8,a,R)	$(q_9,\sqcup,R)$	$(r,-,-)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(r,-,-)$
q_9	$-$	$-$	(q_9,b,R)	$(q_{10},\sqcup,R)$	$(q_9,\sqcup,R)$	$(r,-,-)$
q_{10}	$-$	$-$	$-$	(q_{10},c,R)	$(q_{10},\sqcup,R)$	$(q_3,\dashv,L)$

donde el símbolo $-$ significa «no importa» y las transiciones para los estados t y r no están definidas (tabla pág. 212).

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

Una **configuración** de una máquina de Turing es un elemento de $Q \times \{\, y\sqcup^{\omega} \mid y \in \Gamma^* \,\} \times \mathbb{N}$, donde, ω es el menor ordinal transfinito y $\sqcup^{\omega}$ denota la cadena semi-infinita $\sqcup\sqcup\sqcup \ldots$.

Una configuración (p, z, n) indica que la máquina se encuentra en el estado p, el contenido de la cinta es z y la cabeza de lecto-escritura se encuentra en la posición n.

Convención

Las configuraciones serán denotadas por letras griegas minúsculas α,β,δ, $\ldots$.

Ejemplo

En el tablero.

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

La **configuración inicial** para una palabra de entrada $x \in \Sigma^*$ es $(s, \vdash x \sqcup^\omega, 0)$.

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

Sea $z \in \Gamma^\omega$:

(i) z_n denota el n-enésimo símbolo de z (el símbolo más a la izquierda es z_0).

(ii) $\mathrm{s}_b^n(z)$ denota la palabra obtenida al sustituir el símbolo z_n por el símbolo b en la palabra z.

Ejemplo

$$\mathrm{s}_b^4(\underset{0}{\vdash}\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{a}\underset{5}{c}\dots) = \underset{0}{\vdash}\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{c}\dots.$$

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

Sea M una máquina de Turing. La relación **siguiente configuración en un paso**, denotada $\xrightarrow[M]{1}$, es una relación binaria entre configuraciones de la máquina M definida por:

Para cualquier configuración $\alpha = (p, z, n)$,

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, \mathrm{s}_b^n(z), n-1), & \text{si} \quad \delta(p, z_n) = (q, b, L); \\ (q, \mathrm{s}_b^n(z), n+1), & \text{si} \quad \delta(p, z_n) = (q, b, R). \end{cases}$$

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

Sea M una máquina de Turing y sea $n \in \mathbb{N}$. La relación **siguiente configuración en $\boldsymbol{n}$ pasos**, denotada $\xrightarrow[M]{n}$, es una relación binaria entre configuraciones de la máquina M definida inductivamente por:

Para todas las configuraciones α y β,

$$\begin{aligned} \alpha \xrightarrow[M]{0} \beta \quad &\text{sii} \quad \alpha = \beta, \\ \alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta \quad &\text{sii} \quad \text{existe una configuración } \gamma \text{ tal que } \alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \text{ y } \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta. \end{aligned}$$

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

Sea M una máquina de Turing y sea $n \in \mathbb{N}$. La relación **siguiente configuración en cero o más pasos**, denotada $\xrightarrow[M]{*}$, es una relación binaria entre configuraciones de la máquina M definida por:

Para todas las configuraciones α y β,

$$\alpha \xrightarrow[M]{*} \beta \quad \text{sii} \quad \alpha \xrightarrow[M]{n} \beta \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Relaciones entre las configuraciones de las máquinas de Turing

Definición

Sea M una máquina de Turing y sea $n \in \mathbb{N}$. La relación **siguiente configuración en cero o más pasos**, denotada $\xrightarrow[M]{*}$, es una relación binaria entre configuraciones de la máquina M definida por:

Para todas las configuraciones α y β,

$$\alpha \xrightarrow[M]{*} \beta \quad \text{sii} \quad \alpha \xrightarrow[M]{n} \beta \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Observación

La relación $\xrightarrow[M]{*}$ es la cerradura reflexiva y transitiva de la relación $\xrightarrow[M]{1}$.

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ una máquina de Turing y sea $x \in \Sigma^*$.

(i) La máquina M **acepta** la palabra x sii

$$(s, \vdash x {\sqcup}^{\omega}, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n), \text{ para algún } y \text{ y } n.$$

(ii) La máquina M **rechaza** la palabra x sii

$$(s, \vdash x {\sqcup}^{\omega}, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n), \text{ para algún } y \text{ y } n.$$

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ una máquina de Turing. El **lenguaje aceptado** por la máquina M, denotado $\mathrm{L}(M)$, está definido por:

$$\mathrm{L}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \Sigma^* \;\middle|\; (s, \vdash x {\sqcup}^{\omega}, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n), \text{ para algún } y \text{ y } n \right\}.$$

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing **para** (o **se detiene**) (*halt*) en una entrada $x \in \Sigma^*$ sii acepta o rechaza x. En caso contrario, la máquina **no para** (o **no se detiene**) (*loop*) en la entrada x.

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing **para** (o **se detiene**) (*halt*) en una entrada $x \in \Sigma^*$ sii acepta o rechaza x. En caso contrario, la máquina **no para** (o **no se detiene**) (*loop*) en la entrada x.

Definición

Una máquina de Turing es **total** sii la máquina para en todas las entradas (acepta o rechaza cada una de las palabra de su alfabeto de entrada).

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Definiciones

Un lenguaje L es

(i) **recursivamente enumerable** (r.e.) sii existe una máquina de Turing que acepta a L,

(ii) **co-recursivamente enumerable** (co-r.e.) sii su complemento es r.e.,

(iii) **recursivo** sii existe una máquina de Turing total que acepta a L.

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Ejemplo

El lenguaje $\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$ es un lenguaje recursivo (es decir, es un lenguaje r.e. que es aceptado por una máquina de Turing total).

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Teorema

Si un lenguaje es recursivo entonces su complemento también es recursivo.

Demostración

En el tablero.

Lenguajes aceptados por máquinas de Turing

Teorema

Si un lenguaje es recursivo entonces su complemento también es recursivo.

Demostración

En el tablero.

Teorema

Si un lenguaje y su complemento son r.e. entonces el lenguaje es recursivo.

Demostración

En el tablero.

Lenguajes (r.e. y recursivos) y propiedades (semi-decidibles y decidibles)

En el tablero.

Referencias

Dexter C. Kozen [1997] (2012). *Automata and Computability*. Third printing. Undergraduate Texts in Computer Science. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-1844-9 (vid. pág. 2).