SI1001 Teoría de la Computación
Relaciones de equivalencia

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2025-1

Convenciones

- Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en esta sección corresponden a los números asignados en el texto de Susanna S. Epp [Epp2011].
- El conjunto potencia de un conjunto A es denotado $\mathcal{P}A$.

Esquema de la presentación

- Relaciones binarias
- Relaciones reflexivas
- Relaciones simétricas
- Relaciones transitivas
- Relaciones de equivalencia
- Referencias

Tema

- Relaciones binarias
- Relaciones reflexivas
- Relaciones simétricas
- Relaciones transitivas
- Relaciones de equivalencia
- Referencias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Recordemos que el **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}.$$

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación binaria** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación binaria** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.

El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R.

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación binaria** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.

El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R.

Observación

La definición de relación binaria está en la Sección 1.3.

Relaciones binarias

Definición

Sea R una relación binaria de A en B y sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado:

(i) **El elemento x está relacionado con el elemento y por la relación R**, denotado $x\,R\,y$,

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in R.$$

(ii) **El elemento x no está relacionado con el elemento y por la relación R**, denotado $x \not{R}\, y$,

$$x \not{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \notin R.$$

Ejemplo 1.3.3

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y las relaciones S y T de A en B definidas por

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x < y, \qquad T = \{(2, 1), (2, 5)\}.$$

Ejemplo

En el tablero.

Ejemplo

En el tablero.

Ejemplo

Sean A y B dos conjuntos. Note que $R = \emptyset$ y $S = A \times B$ son relaciones de A en B. Estas relaciones son llamadas **relaciones triviales**.

Ejemplo 8.1.2 (la relación de congruencia módulo 2)

Sea E la relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definida por: para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a\,E\,b \quad &\Leftrightarrow \quad a - b \text{ es par} \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \mid (a-b). \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.3 (una relación sobre un conjunto potencia[a])

Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces

$$\mathcal{P}A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Definimos la relación $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ por:

Para todo $S_1, S_2 \in \mathcal{P}A$,

$$S_1 \,\boldsymbol{S}\, S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \text{ tiene al menos tantos elementos como } S_2.$$

[a] Véase correcciones al texto guía en la página web del curso.

Tema

Relaciones reflexivas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

Relaciones reflexivas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

$$
\begin{aligned}
R \text{ es } \textbf{reflexiva} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{para toda } x \in A, (x, x) \in R, \\
R \textbf{ no} \text{ es } \textbf{reflexiva} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe } x \in A \text{ tal que } (x, x) \notin R.
\end{aligned}
$$

Relaciones reflexivas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

R es **reflexiva** $\Leftrightarrow$ para toda $x \in A, (x, x) \in R,$

R **no** es **reflexiva** $\Leftrightarrow$ existe $x \in A$ tal que $(x, x) \notin R.$

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Relaciones simétricas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

Relaciones simétricas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

$$
\begin{aligned}
R \text{ es } \textbf{simétrica} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{para toda } x, y \in A, \text{ si } (x, y) \in R \text{ entonces } (y, x) \in R, \\
R \textbf{ no} \text{ es } \textbf{simétrica} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existen } x, y \in A \text{ tales que } (x, y) \in R \text{ pero } (y, x) \notin R.
\end{aligned}
$$

Relaciones simétricas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

R es **simétrica** $\Leftrightarrow$ para toda $x, y \in A,$ si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$,

R **no** es **simétrica** $\Leftrightarrow$ existen $x, y \in A$ tales que $(x, y) \in R$ pero $(y, x) \notin R$.

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Relaciones transitivas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

Relaciones transitivas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

$$\begin{aligned}
R \text{ es } \textbf{transitiva} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{para toda } x, y, z \in A, \text{ si } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in R, \\
&\qquad \text{entonces } (x, z) \in R, \\
R \textbf{ no} \text{ es } \textbf{transitiva} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existen } x, y, z \in A \text{ tales que } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in R, \\
&\qquad \text{pero } (x, z) \notin R.
\end{aligned}$$

Relaciones transitivas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A.

R es **transitiva** $\Leftrightarrow$ para toda $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$,

R **no** es **transitiva** $\Leftrightarrow$ existen $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, pero $(x, z) \notin R$.

Ejemplo

En el tablero.

Ejemplo 8.2.4 (la relación de congruencia módulo 3)

Sea T la relación sobre $\mathbb{Z}$ definida por: para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \, T \, b \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid (a - b).$$

La relación T es reflexiva, simétrica y transitiva.

Tema

- Relaciones binarias
- Relaciones reflexivas
- Relaciones simétricas
- Relaciones transitivas
- Relaciones de equivalencia
- Referencias

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. La relación R es una **relación de equivalencia**, si y solo si, es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo

La relación de congruencia módulo 3 es una relación de equivalencia (véase Ejemplo 8.2.4).

Ejemplo 8.3.4 (una relación sobre un conjunto de identificadores)

Sea L el conjunto de todos los identificadores permitidos en un cierto lenguaje de programación y sea R una relación sobre L definida por: para todas las cadenas $s, t \in L$,

$$s\,R\,t \quad \Leftrightarrow \quad \text{los ocho primeros caracteres de } s \text{ son iguales a a los ocho primeros caracteres de } t.$$

La relación R es un relación de equivalencia.

Ejercicio

Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$. Definimos la relación de igualdad sobre A por: para todo $x, y \in A$,

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

¿Es la relación de igualad sobre A una relación de equivalencia?

Ejercicio

Sea $A \neq \emptyset$. ¿Son las relaciones $\emptyset$ y $A \times A$ relaciones de equivalencia?

Ejemplo

Sea FUN el conjunto de la funciones de $\{0,1\}$ en $\{0,1\}$.

$$\mathrm{FUN} = \{\, f \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\} \mid f : \{0,1\} \to \{0,1\} \,\},$$

Definimos una relación R sobre FUN por

$$R = \{\, (f,g) \in \mathrm{FUN} \times \mathrm{FUN} \mid f(1) = g(1) \,\}.$$

La relación R es una relación de equivalencia.

Tema

- Relaciones binarias
- Relaciones reflexivas
- Relaciones simétricas
- Relaciones transitivas
- Relaciones de equivalencia
- Referencias

Referencias

[Epp2011] Susanna S. Epp. *Matemáticas Discretas con Aplicaciones*. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning, 2011 (vid. pág. 2).