SI1001 Teoría de la Computación
Modelos de computación: Introducción

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2025-2

Preliminares

Convención

Los números naturales incluyen el cero, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

Sean a y b dos elementos. El **par ordenado** (a, b) es el conjunto en el que a es su primer elemento y b es su segundo elemento.

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

Sean a y b dos elementos. El **par ordenado** (a, b) es el conjunto en el que a es su primer elemento y b es su segundo elemento.

Definición

Dos pares ordenados son **iguales**, si y solo si, sus primeros y segundos elementos son iguales, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \,\}.$$

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}.$$

Ejemplo

Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Entonces

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2)(b, 3)\},$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos. La n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es el conjunto en la que a_1 es su primer elemento, a_2 es el segundo elemento,... y a_n es el n-ésimo elemento.

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos. La n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es el conjunto en la que a_1 es su primer elemento, a_2 es el segundo elemento,... y a_n es el n-ésimo elemento.

Definición

Dos n-tuplas ordenadas son **iguales**, si y solo si, cada par correspondiente de sus elementos son iguales. Es decir,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Preliminares: Productos cartesianos

Definición

El **producto cartesiano de n conjuntos** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, es el conjunto de n-tuplas

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\,\}.$$

Preliminares: Productos cartesianos

Notación

La notación A^n, denota n veces el producto cartesiano del conjunto A consigo mismo, es decir,

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{-veces}}.$$

Funciones numérico-teóricas

Definición

Una **función numérico-teórica** es una función cuya signatura es

$$\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Funciones numérico-teóricas

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$\mathsf{z} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$= x \mapsto 0$	(función **cero**)
$\mathsf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$= x \mapsto x + 1$	(función **sucesor**)
$\mathsf{I}^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$	$= (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$	(funciones **proyecciones**)
$\mathsf{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$= x \mapsto x$	(función **identidad**)
$\mathsf{C}^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$	$= (x_1, \ldots, x_n) \mapsto k$	(funciones **constantes**)
$\mathsf{add} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$= (x, y) \mapsto x + y$	(función **adición**)
$\mathsf{mult} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$= (x, y) \mapsto x \cdot y$	(función **multiplicación**)
$\mathsf{pow} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$= (x, y) \mapsto x^y$	(función **potenciación**)
$\mathsf{fact} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$= x \mapsto x!$	(función **factorial**)

Funciones numérico-teóricas

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$$\mathsf{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\mathsf{pred}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ x - 1, & \text{de otro modo}; \end{cases}$$

(función **predecesor**)

Funciones numérico-teóricas

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$$(\cdot \dot{-} \cdot) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{si } x \geq y; \\ 0, & \text{de otro modo}; \end{cases}$$

(función **diferencia truncada**)

$$|\cdot - \cdot| : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

$$|x - y| = \begin{cases} x \dot{-} y, & \text{si } x \geq y; \\ y \dot{-} x, & \text{de otro modo}; \end{cases}$$

(función **diferencia absoluta**)

Funciones numérico-teóricas

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$$\overline{\mathsf{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\overline{\mathsf{sg}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

(función **cero test**)

$$\mathsf{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\mathsf{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ 1, & \text{si } x \neq 0; \end{cases}$$

(función **cero test inversa**)

Modelos de computación

Computabilidad

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función ¿Las siguientes afirmaciones significan lo mismo?

(i) «la función f es calculable»,

(ii) «la función f es computable»,

(iii) «la función f es recursiva general»,

Algunos modelos de computación

Confluencia de ideas (1934–1937)

- Derivabilidad desde de un sistema de ecuaciones (Kurt Gödel, Jacques Herbrand)
- Cálculo lambda (Alonzo Church, Stephen C. Kleene, J. Barkley Rosser)
- Funciones recursivas generales (Kurt Gödel, Stephen C. Kleene)
- Máquinas de Post (Emil L. Post)
- Máquinas de Turing (Alan M. Turing)

Modelos de computación

Observación

Una presentación moderna y sucinta de varios modelos de computabilidad es [Bournez et al. 2020, § 2]. Presentaciones más detalladas se encuentran en [Odifreddi 1999] y [Davis 1958].

Representación de funciones numérico-teóricas

(i) Representación de cada número natural.

(ii) Representación de k-tuplas.

(iii) Representación de funciones con signatura $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Representación de funciones numérico-teóricas

(i) Representación de cada número natural.
(ii) Representación de k-tuplas.
(iii) Representación de funciones con signatura $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Un par de preguntas

(i) ¿Son las funciones numérico-teóricas representadas por dos modelos de computación X y Y las mismas?

Representación de funciones numérico-teóricas

(i) Representación de cada número natural.
(ii) Representación de k-tuplas.
(iii) Representación de funciones con signatura $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Un par de preguntas

(i) ¿Son las funciones numérico-teóricas representadas por dos modelos de computación X y Y las mismas?
(ii) ¿Son las funciones numérico-teóricas representadas por cualquier modelo de computación las mismas?

Referencias

- Olivier Bournez, Gilles Dowek, Rémi Gilleron, Serge Grigorieff, Jean-Yves Marion, Simon Perdrix y Sophie Tison (2020). «Theoretical Computer Science: Computability, Decidability and Logic». En: *A Guided Tour of Artificial Intelligence Research. Volume III: Interfaces and Applications of Artificial Intelligence*. Ed. por Pierre Marquis, Odile Papini y Henri Prade. Springer Cham, 2020, págs. 1-50. DOI: `10.1007/978-3-030-06170-8_1` (vid. pág. 18).
- Martin Davis (1958). *Computability and Unsolvability*. McGraw-Hill, 1958 (vid. pág. 18).
- Piergiorgio Odifreddi (1999). *Classical Recursion Theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers*. 2.ª ed. Vol. 125. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1999 (1989) (vid. pág. 18).