SI1001 Teoría de la Computación
Modelo de computación: Funciones recursivas

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2025-1

Preliminares

Convenciones

- Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en la versión electrónica del texto de Raúl Gómez Marín y Andrés Sicard Ramírez [GS2025].
- Los números naturales incluyen el cero, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Computabilidad

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función ¿Las siguientes afirmaciones significan lo mismo?

(i) «la función f es calculable»,

(ii) «la función f es computable»,

(iii) «la función f es recursiva»,

(iv) «la función f es efectivamente calculable».

Modelos de computación

Confluencia de ideas (1934–1937)

- Derivabilidad desde de un sistema de ecuaciones (Kurt Gödel, Jacques Herbrand)
- Cálculo lambda (Alonzo Church, Stephen C. Kleene, J. Barkley Rosser)
- Funciones recursivas (Kurt Gödel, Stephen C. Kleene)
- Máquinas de Post (Emil L. Post)
- Máquinas de Turing (Alan M. Turing)

Modelos de computación

Observación

Una presentación moderna y sucinta de varios modelos de computabilidad es [Bou+2020, § 2]. Presentaciones más detalladas se encuentran en [Odi1999] y [Dav1958].

Funciones numérico-teóricas

Definición

Una **función numérico-teórica** es una función cuya signatura es

$$\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Funciones numérico-teóricas

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{z} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & = x \mapsto 0 & \text{(función } \textbf{cero}\text{)} \\
\mathsf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & = x \mapsto x + 1 & \text{(función } \textbf{sucesor}\text{)} \\
\mathsf{I}_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} & = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k & \text{(funciones } \textbf{proyecciones}\text{)} \\
\mathsf{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & = x \mapsto x & \text{(función } \textbf{identidad}\text{)} \\
\mathsf{C}_k^n : \mathbb{N}^x \to \mathbb{N} & = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto k & \text{(funciones } \textbf{constantes}\text{)} \\
\mathsf{add} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} & = (x, y) \mapsto x + y & \text{(función } \textbf{adición}\text{)} \\
\mathsf{mult} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} & = (x, y) \mapsto x \cdot y & \text{(función } \textbf{multiplicación}\text{)} \\
\mathsf{pow} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} & = (x, y) \mapsto x^y & \text{(función } \textbf{potenciación}\text{)} \\
\mathsf{fact} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & = x \mapsto x! & \text{(función } \textbf{factorial}\text{)}
\end{array}
$$

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$$\mathrm{pred}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ x - 1, & \text{de otro modo;} \end{cases}$$

(función **predecesor**)

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{si } x \geq y; \\ 0, & \text{de otro modo;} \end{cases}$$

(función **diferencia truncada**)

$$|x - y| = \begin{cases} x \dot{-} y, & \text{si } x \geq y; \\ y \dot{-} x, & \text{de otro modo;} \end{cases}$$

(función **diferencia absoluta**)

Funciones numérico-teóricas

Ejemplos (funciones numérico-teóricas)

$$\overline{\mathsf{sg}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

(función **cero test**)

$$\mathsf{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ 1, & \text{si } x \neq 0; \end{cases}$$

(función **cero test inversa**)

Funciones primitivas recursivas

Introducción

(i) Definición recursiva de las funciones de adición, multiplicación y potenciación a partir de la definición inductiva de los números naturales.

Funciones primitivas recursivas

Introducción

(i) Definición recursiva de las funciones de adición, multiplicación y potenciación a partir de la definición inductiva de los números naturales.

(ii) Esquema general de las definiciones anteriores.

Funciones primitivas recursivas

Introducción

(i) Definición recursiva de las funciones de adición, multiplicación y potenciación a partir de la definición inductiva de los números naturales.

(ii) Esquema general de las definiciones anteriores.

(iii) ¿Qué funciones numérico-teóricas se pueden definir de manera similar?

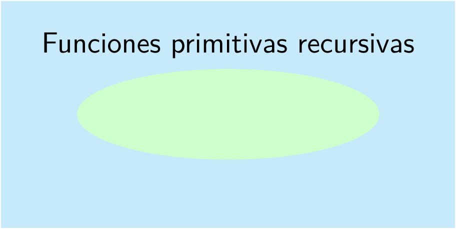
Funciones primitivas recursivas

Descripción

Las funciones primitivas recursivas (FPR) son un subconjunto propio de las funciones numérico-teóricas.

$$\text{FPR}\begin{cases}\text{funciones de base}\\[2em]\text{esquema de composición}\\[2em]\text{esquema de recurrencia primitiva}\end{cases}$$

Funciones numérico-teóricas

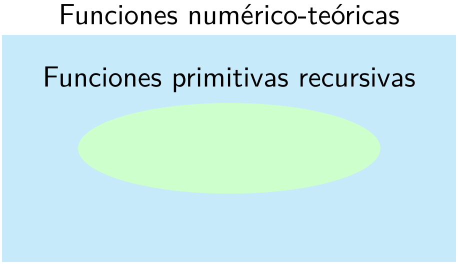


Funciones primitivas recursivas

Descripción

Las funciones primitivas recursivas (FPR) son un subconjunto propio de las funciones numérico-teóricas.[a]

$$\text{FPR}\begin{cases}\text{funciones de base}\\[2ex]\text{esquema de composición}\\[2ex]\text{esquema de recurrencia primitiva}\end{cases}$$



[a] El término *«primitive recursive function»* es traducido por «función primitiva recursiva» o por «función recursiva primitiva». Véase, por ejemplo, [Ivo2013] y [Kle1974].

Funciones primitivas recursivas

Definición

Las siguientes **funciones de base** son FPRs.

$$\mathsf{z} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad = x \mapsto 0 \qquad \text{(función \textbf{cero})}$$

$$\mathsf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad = x \mapsto x + 1 \qquad \text{(función \textbf{sucesor})}$$

$$\mathsf{I}^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k \qquad \text{(funciones \textbf{proyecciones})}$$

Funciones primitivas recursivas

Notación

El símbolo $\vec{x}_n$ denota una n-tupla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números naturales;

Definición

El **esquema de composición** estable que si la función $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y las funciones $h_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, con $i = 1..m$, son FPRs, entonces la función $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(\vec{x}_n) = g(h_1(\vec{x}_n), h_2(\vec{x}_n), \ldots, h_m(\vec{x}_n)),$$

también es una FPR.

Definición

El **esquema de recurrencia primitiva** estable que si la función $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y la función $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ son FPRs, entonces la función $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definida por

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}_n, 0) &= g(\vec{x}_n), \\
f(\vec{x}_n, y+1) &= h(\vec{x}_n, y, f(\vec{x}_n, y)).
\end{aligned}
$$

también es una FPR.

Definición 2.5

Una función numérico-teórica es **primitiva recursiva**, si y sólo si, la función es una función de base, o, la función se puede obtener a partir de las funciones de base mediante la aplicación de un número finito de veces de los esquemas de composición y recurrencia primitiva.

Funciones primitivas recursivas

Ejemplos

En el tablero.

Referencias

[Bou+2020] Olivier Bournez, Gilles Dowek, Rémi Gilleron, Serge Grigorieff, Jean-Yves Marion, Simon Perdrix y Sophie Tison. «Theoretical Computer Science: Computability, Decidability and Logic». En: *A Guided Tour of Artificial Intelligence Research. Volume III: Interfaces and Applications of Artificial Intelligence*. Ed. por Pierre Marquis, Odile Papini y Henri Prade. Springer Cham, 2020, págs. 1-50. DOI: 10.1007/978-3-030-06170-8_1 (vid. pág. 5).

[Dav1958] Martin Davis. *Computability and Unsolvability*. McGraw-Hill, 1958 (vid. pág. 5).

[GS2025] Raúl Gómez Marín y Andrés Sicard Ramírez. *Informática Teórica: Elementos Propedeúticos*. Reimpresión digital con algunas correcciones y modificaciones. 2025. URL: http://www1.eafit.edu.co/asr/pubs/informatica-teorica.html (vid. pág. 2).

[Ivo2013] Carlos Ivorra Castillo. «Lógica y Teoría de Conjuntos». 2013. URL: https://www.uv.es/ivorra/ (visitado 27-11-2017) (vid. pág. 14).

[Kle1974] Stephen Cole Kleene. *Introducción a la Metamatemática*. Trad. por Manuel Garrido. Editorial Tecnos, 1974 (vid. pág. 14).

Referencias

[Odi1999] Piergiorgio Odifreddi. *Classical Recursion Theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers*. 2.ª ed. Vol. 125. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1999 (vid. pág. 5).