SI1001 Teoría de la Computación
Cardinalidad

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2025-1

Convenciones

Convenciones

- Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en esta sección corresponden a los números asignados en el texto de Susanna S. Epp [Epp2011].
- El conjunto potencia de un conjunto A es denotado $\mathcal{P}A$.

Convenciones

Conjuntos numéricos

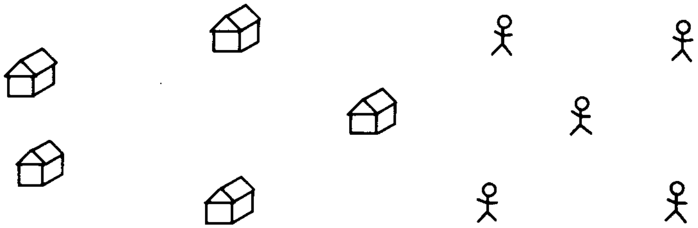
$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} && \text{(conjunto de los números naturales)}\\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{(conjunto de los números enteros)}\\
\mathbb{Z}^{+} &= \{1, 2, 3, \ldots\} && \text{(conjunto de los números enteros positivos)}\\
\mathbb{Z}^{-} &= \{\ldots, -3, -2, -1\} && \text{(conjunto de los números enteros negativos)}\\
\mathbb{Q} &= \{\, p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \,\} && \text{(números racionales)}\\
\mathbb{R} &= (-\infty, \infty) && \text{(conjunto de los números reales)}\\
\mathbb{R}^{+} &= (0, \infty) && \text{(conjunto de los números reales positivos)}\\
\mathbb{R}^{-} &= (-\infty, 0) && \text{(conjunto de los números reales negativos)}
\end{aligned}
$$

Introducción

$$\text{conjuntos} \begin{cases} \text{finitos (enumerables)} \\ \text{infinitos} \begin{cases} \text{enumerables} \\ \text{no enumerables} \end{cases} \end{cases}$$

Pregunta

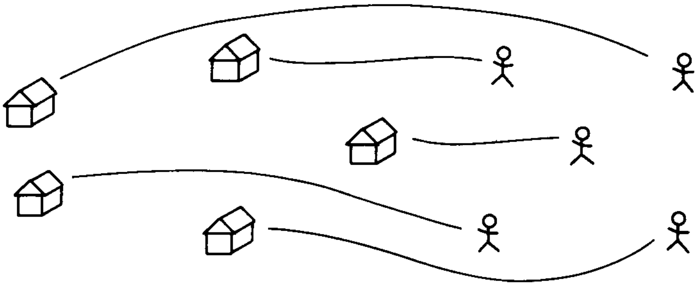
Supóngase que usted solo saber contar hasta tres. ¿El conjunto de casas y el conjunto de personas en la figura tienen el mismo tamaño?



(Figura tomada de [End1977, Fig. 30])

Respuesta

Sí. El conjunto de casas es del mismo tamaño que el conjunto de personas como es indicado por la figura.



(Figura tomada de [End1977, Fig. 30])

Pregunta

En la pregunta anterior los conjuntos eran finitos. ¿Podemos aplicar un razonamiento similar si los conjuntos son infinitos?

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto A **tiene la misma cardinalidad** que el conjunto B, si y solo si, hay una correspondencia uno a uno de A a B.

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto A **tiene la misma cardinalidad** que el conjunto B, si y solo si, hay una correspondencia uno a uno de A a B.

Ejemplo

El conjunto de casas y el conjunto de personas en la introducción tienen la misma cardinalidad.

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto A **tiene la misma cardinalidad** que el conjunto B, si y solo si, hay una correspondencia uno a uno de A a B.[a]

Ejemplo

El conjunto de casas y el conjunto de personas en la introducción tienen la misma cardinalidad.

[a] Los términos «correspondencia uno a uno», «correspondencia inyectiva» y «función biyectiva» son sinónimos.

Ejemplo

El conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ tienen la misma cardinalidad.

La función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N} = n \mapsto n - 1$ es biyectiva como lo ilustra la figura.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z}^+ & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots
\end{array}
$$

Teorema 7.4.1

Sean A, B y C conjuntos. Entonces

(i) Propiedad reflexiva de la cardinalidad: A tiene la misma cardinalidad que A.

(ii) Propiedad simétrica de la cardinalidad: si A tiene la misma cardinalidad que B, entonces B tiene la misma cardinalidad que A.

(iii) Propiedad transitiva de la cardinalidad: si A tiene la misma cardinalidad que B y B tiene la misma cardinalidad que C, entonces A tiene la misma cardinalidad que C.

Ejemplo

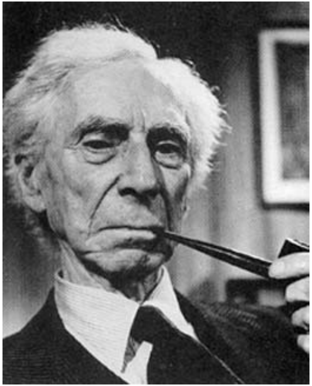
En el siguiente ejemplo un conjunto tiene la misma cardinalidad que uno de sus subconjuntos propios.

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los números pares $2\mathbb{Z}$ tienen la misma cardinalidad. La función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} = n \mapsto 2n$ demuestra que los conjuntos tienen la misma cardinalidad como lo ilustra la figura.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Z} & \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
2\mathbb{Z} & \dots & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & \dots & 2n & \dots
\end{array}$$

Pregunta

¿Es posible construir un ejemplo similar al anterior empleando conjuntos finitos?



Bertrand Russell (1872 – 1970)
(Imagen tomada de MacTutor)

«The possibility that whole and part may have the same number of terms is, it must be confessed, shocking to common-sense.» [Rus1903, p. 358]

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **infinito enumerable**, si y solo si, tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$.

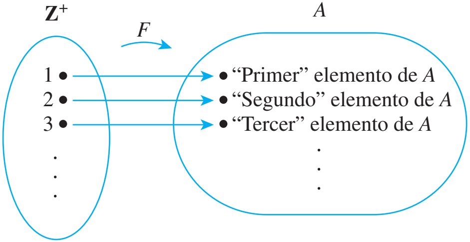


Figura 7.4.1 Enumeración de un conjunto infinito enumerable.

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **infinito enumerable**, si y solo si, tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$.[a]

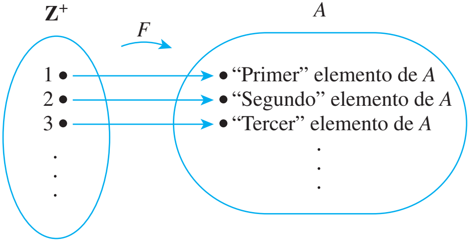


Figura 7.4.1 Enumeración de un conjunto infinito enumerable.

[a] Algunos autores y traductores consideran los términos «enumerable», «numerable» y «contable» como sinónimos, véase por ejemplo [Kle1974b] y su traducción [Kle1974a]. Sin embargo otros no lo hacen.

Conjuntos enumerables

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **enumerable**, si y solo si, es finito o infinito contable.

Conjuntos enumerables

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **enumerable**, si y solo si, es finito o infinito contable.

Definición

Un conjunto que no es enumerable es un conjunto **no enumerable**.

Conjuntos enumerables

Ejemplo

Los conjuntos $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{N}$ son conjuntos infinitos enumerables.

Conjuntos enumerables

Observación

Recuerde que una **sucesión infinita** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una función del conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ a un conjunto A.

Conjuntos enumerables

Ejemplo

Una secuencia infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de elementos distintos es un conjunto infinito enumerable.

Ejemplo

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es infinito enumerable porque está dado por la secuencia infinita sin repeticiones $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ como lo ilustra la figura.

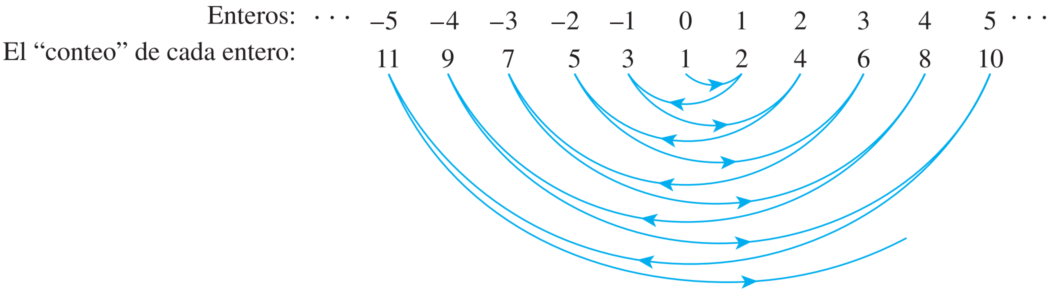


Figura 7.4.2 Enumerando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Conjuntos enumerables

Ejemplo (continuación)

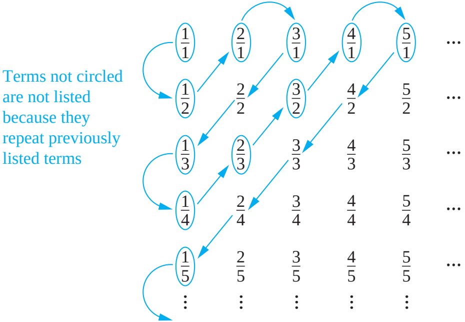
La enumeración de la figura anterior está dado por la función biyectiva

$$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$$
$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par;} \\ (1-n)/2, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo

El conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ es infinito enumerable porque está dado por la secuencia infinita

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \ldots$$

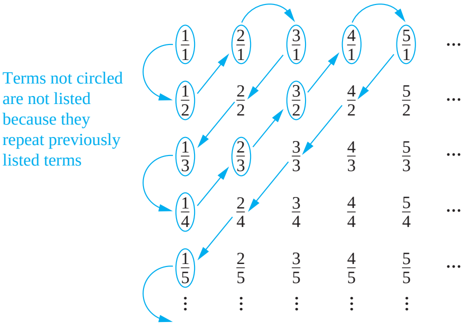


(Figura tomada de [Ros2012, pág. 173])

Ejemplo

El conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ es infinito enumerable porque está dado por la secuencia infinita[a]

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \dots$$



(Figura tomada de [Ros2012, pág. 173])

[a] Una enumeración diferente, implementada en Haskell, es presentada en [GLB2006].

Conjuntos no enumerables

Pregunta

¿Existen conjuntos no enumerables?

Conjuntos no enumerables

Pregunta

¿Existen conjuntos no enumerables?

Teorema 7.4.2

El conjunto de los números reales en el intervalo $(0, 1)$ es no enumerable.

Conjuntos no enumerables

Pregunta

¿Existen conjuntos no enumerables?

Teorema 7.4.2

El conjunto de los números reales en el intervalo $(0, 1)$ es no enumerable.

Demostración

Por el método de diagonalización de Cantor.

El método de diagonalización de Cantor

Demostración (diagonalización de Cantor)

Supongamos que el conjunto de los números reales en el intervalo $(0, 1)$ es contable.

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}\dots d_{1n}\dots \\
r_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}\dots d_{2n}\dots \\
r_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}\dots d_{3n}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(continua en la próxima diapositiva)

El método de diagonalización de Cantor

Demostración (continuación)

Construyamos un número decimal $r = 0.d_1d_2d_3\ldots \in (0,1)$, donde

$$d_i = \begin{cases} 5, & \text{si } d_{ii} \neq 5; \\ 6, & \text{si } d_{ii} = 5. \end{cases}$$

Demostración (continuación)

Construyamos un número decimal $r = 0.d_1d_2d_3\ldots \in (0,1)$, donde

$$d_i = \begin{cases} 5, & \text{si } d_{ii} \neq 5; \\ 6, & \text{si } d_{ii} = 5. \end{cases}$$

El número r no está en la enumeración anterior porque difiere de cada número en la enésima posición decimal. Por lo tanto, el conjunto de los números reales en el intervalo $(0,1)$ es no contable. ∎

Teorema 7.4.3

Cualquier subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable.

Conjuntos no enumerables

Teorema 7.4.3

Cualquier subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable.

Corolario 7.4.4

Cualquier conjunto con un subconjunto no enumerable es no enumerable.

Conjuntos no enumerables

Teorema

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es no enumerable.

Conjuntos no enumerables

Teorema

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es no enumerable.

Demostración

El intervalo $(0, 1)$ es un subconjunto no enumerable de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, por el corolario 7.4.4, el conjunto $\mathbb{R}$ es no enumerable.

Ejemplo 7.4.5

El conjunto $\mathbb{R}$ tiene la misma cardinalidad que el intervalo $(0, 1)$.

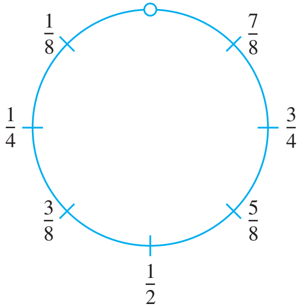


Figura pág. 460.

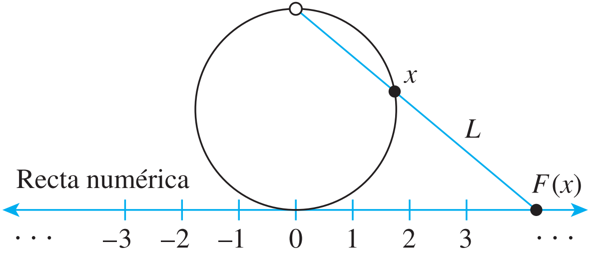


Figura pág. 461.

Conjuntos no enumerables

Observación

- De acuerdo a los teoremas y ejemplos anteriores, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es «mayor» a la cardinalidad de $\mathbb{Z}$.

Conjuntos no enumerables

Observación

- De acuerdo a los teoremas y ejemplos anteriores, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es «mayor» a la cardinalidad de $\mathbb{Z}$.
- Se puede demostrar que la cardinalidad de cualquier conjunto es «menor» que la cardinalidad de su conjunto potencia.

Conjuntos no enumerables

Observación

- De acuerdo a los teoremas y ejemplos anteriores, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es «mayor» a la cardinalidad de $\mathbb{Z}$.
- Se puede demostrar que la cardinalidad de cualquier conjunto es «menor» que la cardinalidad de su conjunto potencia.

Ejemplo

Una sucesión infinita de conjuntos infinitos cada vez «mayores» es

$$\mathbb{Z}, \mathcal{P}\mathbb{Z}, \mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{Z}, \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{Z}, \ldots$$

Números cardinales finitos y transfinitos

Notación

Los números cardinales finitos se denotan $0, 1, 2, \ldots$

Los números cardinales transfinitos se denotan $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$
(El símbolo $\aleph$ se llama aleph y es la primera letra del alfabeto hebreo)

Números cardinales transfinitos

Notación

Sea A un conjunto. La cardinalidad de A es denotada por $\overline{\overline{A}}$.

Ejemplo

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{Z}^+}} = \overline{\overline{\mathbb{Z}}} = \overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0 \qquad \text{(aleph-cero),}$$
$$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{(0,1)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}\mathbb{N}}} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \qquad \text{(el continuo).}$$

Notación

Sean A y B conjuntos. El conjunto de funciones de A en B es denotado por B^A.

Notación

Sean A y B conjuntos. El conjunto de funciones de A en B es denotado por B^A.

Teorema

Sean A y B conjuntos. La cardinalidad del conjunto de funciones de A en B es

$$\overline{\overline{B^A}} = \overline{\overline{B}}^{\overline{\overline{A}}}.$$

Números cardinales transfinitos

Ejemplos

- Sea $A = \{a, b, c\}$. La cardinalidad del conjunto de funciones de A en $\{0, 1\}$ es $2^3 = 8$.
- La cardinalidad del conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ en $\{0, 1\}$ es $2^{\aleph_0}$.

Referencias

[End1977] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1977 (vid. págs. 5, 6).

[Epp2011] Susanna S. Epp. *Matemáticas Discretas con Aplicaciones*. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning, 2011 (vid. pág. 2).

[GLB2006] Jeremy Gibbons, David Lester y Richard Bird. «Functional Pearl. Enumerating the Rationals». En: *Journal of Functional Programming* 16.3 (2006), págs. 281-296. DOI: `10.1017/S0956796806005880` (vid. pág. 26).

[Kle1974a] Stephen Cole Kleene. *Introducción a la Metamatemática*. Trad. por Manuel Garrido. Editorial Tecnos, 1974 (vid. pág. 17).

[Kle1974b] Stephen Cole Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Seventh reprint. North-Holland, 1974 (vid. pág. 17).

[Ros2012] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7.ª ed. McGraw-Hill, 2012 (vid. págs. 25, 26).

[Rus1903] Bertrand Russell. *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, 1903 (vid. pág. 15).