CM0260 Lógica
Teoría de conjuntos

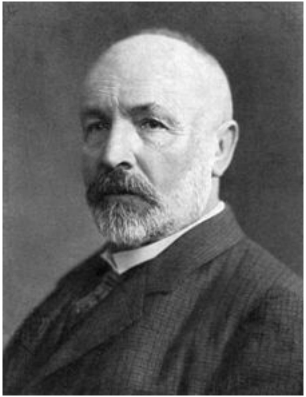
Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2015-2

(Última actualización: 29 de junio de 2024)

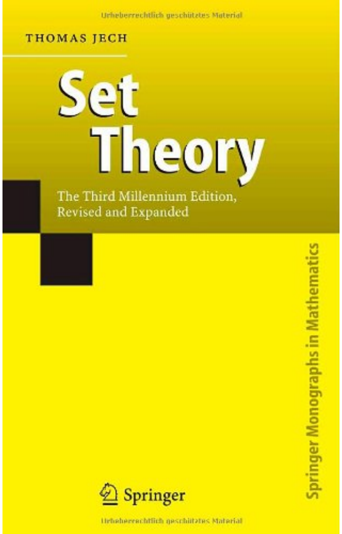
Cantor alrededor de 1870



Georg Cantor (1845 – 1918)[1]

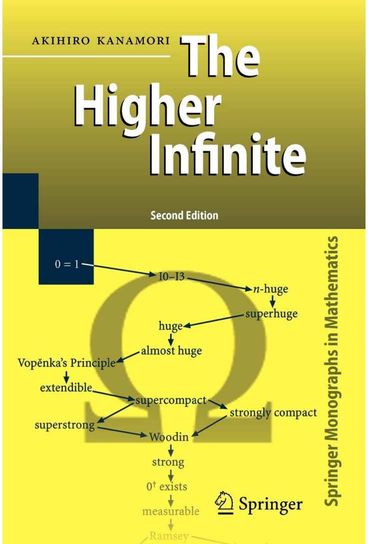
[1] Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor .

Introducción



«*Set theory was invented by Georg Cantor... It was however Cantor who realized the significance of one-to-one functions between sets and introduced the notion of cardinality of a set.*» [pág. 15]

Introducción



«Set theory was born on that December 1873 day when Cantor established that the reals are uncountable, i.e.there is no one-to-one correspondence between the reals and the natural numbers.» [pág. XII]

Notación lógica

Símbolo	T1, T2	T3	T4
Conjunción	$\cdot$	$\wedge$	$\wedge$
Disyunción	$\vee$	$\vee$	$\vee$
Negación	$\sim$	$\neg$	$\sim$
Condicional	$\supset$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
Bicondicional	$\equiv$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
Cuantificación universal	$(x)Px$	$\forall x P(x)$	$\forall x P(x)$
Cuantificación existencial	$(\exists x)Px$	$\exists x P(x)$	$\exists x P(x)$

T1: [Copi 2001]
T2: [Hurley y Watson 2016]
T3: [Rosen 2004]
T4: [Sierra A. 2010]

Conjuntos

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Conjuntos

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Relación (binaria) de pertenencia

$x \in A$:	El elemento x pertenece al conjunto A.
$x \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x \in A)$:	El elemento x no pertenece al conjunto A.

Conjuntos

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Relación (binaria) de pertenencia

$x \in A$: El elemento x pertenece al conjunto A.

$x \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x \in A)$: El elemento x no pertenece al conjunto A.

Ejemplos

- Listando sus elementos: $\mathrm{V} = \{a, e, i, o, u\}$.

Conjuntos

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Relación (binaria) de pertenencia

$x \in A$: El elemento x pertenece al conjunto A.

$x \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x \in A)$: El elemento x no pertenece al conjunto A.

Ejemplos

- Listando sus elementos: $\mathrm{V} = \{a, e, i, o, u\}$.
- Empleando puntos suspensivos: $\mathrm{D} = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Conjuntos

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Relación (binaria) de pertenencia

$x \in A$: El elemento x pertenece al conjunto A.

$x \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x \in A)$: El elemento x no pertenece al conjunto A.

Ejemplos

- Listando sus elementos: $\mathrm{V} = \{a, e, i, o, u\}$.
- Empleando puntos suspensivos: $\mathrm{D} = \{0, 1, \ldots, 9\}$.
- Empleando una propiedad:

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 10\}.$$

Conjuntos

Ejemplos (Conjuntos comunes en Matemáticas)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \text{el conjunto de los números naturales} \\
&= \{0, 1, 2, \ldots\} \\[1em]
\mathbb{Z} &= \text{el conjunto de los números enteros} \\
&= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\[1em]
\mathbb{Z}^+ &= \text{el conjunto de los números enteros positivos} \\
&= \{1, 2, \ldots\} \\[1em]
\mathbb{Q} &= \text{el conjunto de los números racionales} \\
&= \{\, p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \,\} \\[1em]
\mathbb{R} &= \text{el conjunto de los números reales} \\
&= \text{?}
\end{aligned}
$$

Conjuntos

Ejemplos

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$
$$B = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\},$$
$$C = \{\mathbb{N}, a\}.$$

Tipos de datos

Observación

'*Note that the concept of a datatype, or type, in computer science is built upon the concept of a set. In particular, a* ***datatype*** *or* ***type*** *is the name of a set, together with a set of operations that can be performed on objects from that set. For example, boolean is the name of the set* $\{0, 1\}$ *together with operators on one or more elements of this set, such as* AND, OR, *and* NOT.' [Rosen 2012, pág. 117]

Igualdad entre conjuntos

Definición (Igualdad entre conjuntos)

Dos conjuntos A y B son iguales si, y solo si, tienen los mismos elementos, es decir,

$$A = B \text{ sii } \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Igualdad entre conjuntos

Definición (Igualdad entre conjuntos)

Dos conjuntos A y B son iguales si, y solo si, tienen los mismos elementos, es decir,

$$A = B \text{ sii } \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\forall A \forall B[\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B] \quad \text{(axioma de extensionalidad)}$$

Igualdad entre conjuntos

Definición (Igualdad entre conjuntos)

Dos conjuntos A y B son iguales si, y solo si, tienen los mismos elementos, es decir,

$$A = B \text{ sii } \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\forall A \forall B[\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B] \quad \text{(axioma de extensionalidad)}$$

Por lo tanto, que dos conjuntos A y B son diferentes se expresa por

$$A \neq B \text{ sii } \exists x(x \in A \land x \notin B) \lor \exists x(x \in B \land x \notin A).$$

Igualdad entre conjuntos

- No importa el orden

$$\{a, e, i, o, u\} = \{i, o, a, e, u\}$$

Igualdad entre conjuntos

- No importa el orden

$$\{a, e, i, o, u\} = \{i, o, a, e, u\}$$

- No importa los elementos repetidos (convención de Rosen [2004])

$$\{a, a, a, b\} = \{a, b\}$$

El conjunto vacío y el conjunto universal

Definición (Conjunto vacío)

El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos, es decir,

$$\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}.$$

El conjunto vacío y el conjunto universal

Definición (Conjunto vacío)

El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos, es decir,

$$\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}.$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\exists A \forall x (x \notin A) \quad \text{(axioma del conjunto vacío)}$$

El conjunto vacío y el conjunto universal

Definición (Conjunto vacío)

El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos, es decir,

$$\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}.$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\exists A \forall x (x \notin A) \quad \text{(axioma del conjunto vacío)}$$

Observación: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

El conjunto vacío y el conjunto universal

Definición (Conjunto vacío)

El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos, es decir,

$$\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}.$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\exists A \forall x (x \notin A) \quad \text{(axioma del conjunto vacío)}$$

Observación: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

Definición (Conjunto universal)

El conjunto universal, denotado U, contiene todos los objetos bajo consideración.

Relación de pertenencia

Ejercicio (Rosen [2004], problema 8, pág. 78)

Determinar si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.

a. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

b. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

Relación de pertenencia

Ejercicio (Rosen [2004], problema 8, pág. 78)

Determinar si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.

a. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (verdadera)

b. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (verdadera)

c. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ (falsa)

Subconjuntos

Definición (Subconjunto)

El conjunto A se dice que es un subconjunto del conjunto B (denotado $A \subseteq B$) si, y solo si, todo elemento de A es también elemento de B, es decir

$$A \subseteq B \text{ sii } \forall x(x \in A \to x \in B).$$

Por lo tanto, si el conjunto A no es subconjunto del conjunto B significa que algún elemento de A no es elemento de B, es decir,

$$\neg(A \subseteq B) \text{ sii } \exists x(x \in A \wedge x \notin B).$$

Subconjuntos

Definición (Subconjunto)

El conjunto A se dice que es un subconjunto del conjunto B (denotado $A \subseteq B$) si, y solo si, todo elemento de A es también elemento de B, es decir

$$A \subseteq B \text{ sii } \forall x(x \in A \to x \in B).$$

Por lo tanto, si el conjunto A no es subconjunto del conjunto B significa que algún elemento de A no es elemento de B, es decir,

$$\neg(A \subseteq B) \text{ sii } \exists x(x \in A \land x \notin B).$$

Teorema

Para cualquier conjunto A, $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$.

Subconjuntos

Igualdad entre conjuntos

Sean A y B conjuntos, entonces

$$A = B \text{ sii } A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Subconjuntos

Igualdad entre conjuntos

Sean A y B conjuntos, entonces

$$A = B \text{ sii } A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Definición (Subconjunto propio)

El conjunto A se dice que es un subconjunto propio del conjunto B (denotado $A \subset B$) cuando

$$A \subset B \text{ sii } A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Subconjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 8, pág. 78)

Determinar si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.

e. $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

f. $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Subconjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 8, pág. 78)

Determinar si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.

e. $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (verdadera)

f. $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (verdadera)

Subconjuntos

Ejemplo

- Formulación 1 (Rosen [2004], problema 11, pág. 78)

  Supongamos que A, B y C son conjuntos tales $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Demostrar que $A \subseteq C$.

Subconjuntos

Ejemplo

- Formulación 1 (Rosen [2004], problema 11, pág. 78)

  Supongamos que A, B y C son conjuntos tales $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Demostrar que $A \subseteq C$.

- Formulación 2 (Sierra A. [2010], ejercicio 1.1, pág. 3)

  Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demostrar que $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.

Subconjuntos

Ejemplo

- Formulación 1 (Rosen [2004], problema 11, pág. 78)

  Supongamos que A, B y C son conjuntos tales $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Demostrar que $A \subseteq C$.

- Formulación 2 (Sierra A. [2010], ejercicio 1.1, pág. 3)

  Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demostrar que $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$.

- Formulación 3

  Demostrar la validez del siguiente argumento:

$$A \subseteq B$$

$$B \subseteq C \quad / \therefore\ A \subseteq C$$

(continua en la próxima diapositiva)

Subconjuntos

Ejemplo (continuación)

Solución de Rosen [2004].

Supongamos que $x \in A$. Como $A \subseteq B$ esto implica que $x \in B$. Como $B \subseteq C$, vemos que $x \in C$. Como $x \in A$ implica que $x \in C$, se deduce que $A \subseteq C$.

(Rosen [2004, §1.5] presenta varios ejemplos de este tipo de pruebas)

Subconjuntos

Ejemplo (continuación)

Solución de Rosen [2004].

Supongamos que $x \in A$. Como $A \subseteq B$ esto implica que $x \in B$. Como $B \subseteq C$, vemos que $x \in C$. Como $x \in A$ implica que $x \in C$, se deduce que $A \subseteq C$.

(Rosen [2004, §1.5] presenta varios ejemplos de este tipo de pruebas)

Prueba formal

1	$A \subseteq B$	
2	$B \subseteq C \quad / \therefore\ A \subseteq C$	
3	$\forall x(x \in A \to x \in B)$	Def. $\subseteq$, 1
4	$\forall x(x \in B \to x \in C)$	Def. $\subseteq$, 2
5	$x \in A \to x \in B$	UI 3
6	$x \in B \to x \in C$	UI 4
7	$\quad\vert\ x \in A$	ACP
8	$\quad\vert\ x \in B$	MP 5, 7
9	$\quad\vert\ x \in C$	MP 6, 8
10	$x \in A \to x \in C$	CP 7–9
11	$\forall x(x \in A \to x \in C)$	UG 10
12	$A \subseteq C$	Def. $\subseteq$, 11

Subconjuntos

Observación

Recordar que

1. no se puede demostrar empleando un ejemplo y
2. un contraejemplo se puede usar para refutar.

Subconjuntos

Observación

Recordar que

1. no se puede demostrar empleando un ejemplo y
2. un contraejemplo se puede usar para refutar.

Ejemplo (Sierra A. [2010], ejercicio 1.2, pág. 3)

Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demostrar o refutar que $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to \neg(A \subseteq C)$.

Subconjuntos

Ejercicio (Sierra A. [2010], ejercicio 1.17, pág. 3)

Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demostrar formalmente o refutar el siguiente argumento:

1 $A \neq B$

2 $A \subseteq B \quad / \therefore \; \neg(B \subseteq A)$

Subconjuntos

Ejercicio (Sierra A. [2010], ejercicio 1.17, pág. 3)

Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demostrar formalmente o refutar el siguiente argumento:

1	$A \neq B$	
2	$A \subseteq B \quad / \therefore\ \neg(B \subseteq A)$	
3	$(\exists x)(x \in A \land x \notin B) \lor (\exists x)(x \in B \land x \notin A)$	Def. $\neq$, 1
4	$(\forall x)(x \in A \to x \in B)$	Def. $\subseteq$, 2
5	$\neg(\exists x)\neg(x \in A \to x \in B)$	CQ 4
6	$\neg(\exists x)(x \in A \land x \notin B)$	Impl, DM 5
7	$(\exists x)(x \in B \land x \notin A)$	DS 3, 6
8	$\neg(B \subseteq A)$	Def. $\subseteq$, 7

Subconjuntos

Ejercicio (Sierra A. [2010], ejercicio 1.32, pág. 3)

Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demostrar o refutar que $A \in B \to A \subseteq B$.

Subconjuntos

Ejercicio (Sierra A. [2010], ejercicio 1.32, pág. 3)

Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demostrar o refutar que $A \in B \to A \subseteq B$.

Refutación (contraejemplo)

Sea $A = \{1\}$ y $B = \{\{1\}, 2\}$. Entonces $A \in B$, pero A no es subconjunto de B.

Conjuntos finitos e infinitos

Definición (Cardinalidad)

El número de elementos distintos en un conjunto A, denotado $|A|$, es llamado la cardinalidad de A.

Conjuntos finitos e infinitos

Definición (Cardinalidad)

El número de elementos distintos en un conjunto A, denotado $|A|$, es llamado la cardinalidad de A.

Definición (Conjuntos finito e infinitos)

Sea A un conjunto. Si $|A| = n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces A es un conjunto finito, de lo contrario, A es un conjunto infinito.

Conjuntos finitos e infinitos

Definición (Cardinalidad)

El número de elementos distintos en un conjunto A, denotado $|A|$, es llamado la cardinalidad de A.

Definición (Conjuntos finito e infinitos)

Sea A un conjunto. Si $|A| = n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces A es un conjunto finito, de lo contrario, A es un conjunto infinito.

Ejemplos

$$|\emptyset| = 0,$$

$$\begin{aligned} |\{a, e, i, o, u\}| &= |\{a, a, a, a, e, i, o, u\}| \\ &= 5. \end{aligned}$$

El conjunto de partes de un conjunto

Definición (Conjunto de partes)

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, denotado $P(A)$, es llamado el conjunto de partes (o conjunto potencia) de A, es decir,

$$P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}.$$

El conjunto de partes de un conjunto

Definición (Conjunto de partes)

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, denotado $P(A)$, es llamado el conjunto de partes (o conjunto potencia) de A, es decir,

$$P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}.$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A) \quad \text{(axioma del conjunto potencia)}$$

El conjunto de partes de un conjunto

Definición (Conjunto de partes)

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, denotado $P(A)$, es llamado el conjunto de partes (o conjunto potencia) de A, es decir,

$$P(A) = \{\, x \mid x \subseteq A \,\}.$$

La anterior definición proviene del axioma

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A) \quad \text{(axioma del conjunto potencia)}$$

Ejemplo

$P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

El conjunto de partes de un conjunto

Teorema

Sea A un conjunto. Si $|A| = n \in \mathbb{N}$, entonces $|P(A)| = 2^n$.

El conjunto de partes de un conjunto

Teorema

Sea A un conjunto. Si $|A| = n \in \mathbb{N}$, entonces $|P(A)| = 2^n$.

(La demostración de este teorema emplea inducción matemática la cual será vista en un curso posterior.)

El conjunto de partes de un conjunto

Teorema

Sea A un conjunto. Si $|A| = n \in \mathbb{N}$, entonces $|P(A)| = 2^n$.

(La demostración de este teorema emplea inducción matemática la cual será vista en un curso posterior.)

Ejercicio (Rosen [2004], problema 15, pág. 79)

Hallar el conjunto de partes de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

El conjunto de partes de un conjunto

Teorema

Sea A un conjunto. Si $|A| = n \in \mathbb{N}$, entonces $|P(A)| = 2^n$.

(La demostración de este teorema emplea inducción matemática la cual será vista en un curso posterior.)

Ejercicio (Rosen [2004], problema 15, pág. 79)

Hallar el conjunto de partes de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Solución: $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

El conjunto de partes de un conjunto

Ejercicio (Rosen [2004], problema complementario 35, pág. 107)

Supongamos que A y B son conjuntos tales que el conjunto de las partes de A es subconjunto del conjunto de las partes de B. ¿Se puede concluir que A es subconjunto de B? Justificar su respuesta.

El conjunto de partes de un conjunto

Ejercicio (Rosen [2004], problema complementario 35, pág. 107)

Supongamos que A y B son conjuntos tales que el conjunto de las partes de A es subconjunto del conjunto de las partes de B. ¿Se puede concluir que A es subconjunto de B? Justificar su respuesta.

Respuesta: Si se puede concluir que $A \subseteq B$.

Justificación: Supongamos que A no es subconjunto de B, es decir, existe un x tal que $x \in A$ y $x \notin B$. Entonces $\{x\} \in P(A)$ pero $\{x\} \notin P(B)$, es decir, $P(A)$ no es subconjunto de $P(B)$. Lo anterior contradice el supuesto de que $P(A) \subseteq P(B)$.

Tuplas ordenadas

Definición (n-tupla ordenada)

La n-tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada en la que a_1 es su primer elemento, a_2 es el segundo elemento,... y a_n es el n-ésimo elemento.

Tuplas ordenadas

Definición (n-tupla ordenada)

La n-tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada en la que a_1 es su primer elemento, a_2 es el segundo elemento,... y a_n es el n-ésimo elemento.

Definición (Igualdad de n-tuplas ordenadas)

Dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y solo si, cada par correspondiente de sus elementos son iguales. Es decir,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ sii } a_i = b_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Producto cartesiano

Definición (Producto cartesiano de 2 conjuntos)

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}.$$

Producto cartesiano

Definición (Producto cartesiano de 2 conjuntos)

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{ \, (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \, \}.$$

Ejemplo

Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2\}$. Entonces

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

Producto cartesiano

Ejercicio (Rosen [2004], problema 22, pág. 79)

Supongamos que $A \times B = \emptyset$, donde A y B son conjuntos. ¿Qué se puede concluir?

Producto cartesiano

Ejercicio (Rosen [2004], problema 22, pág. 79)

Supongamos que $A \times B = \emptyset$, donde A y B son conjuntos. ¿Qué se puede concluir?

Solución: A y/o B son el conjunto vacío.

Producto cartesiano

Teorema (Rosen [2004], problema 23, pág. 79)

Sea A un conjunto, entonces $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A \times \emptyset &= \{\, (x, y) \mid x \in A \wedge y \in \emptyset \,\} && \text{(def. producto cartesiano)} \\
&= \emptyset && \text{(def. conjunto vacío)} \\
&= \{\, (x, y) \mid x \in \emptyset \wedge y \in A \,\} && \text{(def. conjunto vacío)} \\
&= \emptyset \times A && \text{(def. producto cartesiano)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Producto cartesiano

Ejercicio

Supongamos que $A \times B = B \times A$, donde A y B son conjuntos. ¿Qué se puede concluir?

Producto cartesiano

Ejercicio

Supongamos que $A \times B = B \times A$, donde A y B son conjuntos. ¿Qué se puede concluir?

Solución: A y/o B son el conjunto vacío o $A = B$.

Producto cartesiano

Teorema (Rosen [2004], problema 26, pág. 79)

El producto cartesiano no es conmutativo, es decir, $A \times B \neq B \times A$ para conjuntos A y B no vacíos, a no ser que $A = B$.

Producto cartesiano

Definición (Producto cartesiano de n conjuntos)

El producto cartesiano de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, es el conjunto de n-tuplas

$$\{\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\,\}.$$

Uso de notación de conjunto con cuantificadores

Escribir explícitamente el dominio de cuantificación

- $\forall x \in A\ P(x)$: Cuantificación universal de $P(x)$ donde el dominio es el conjunto A.
- $\exists x \in A\ P(x)$: Cuantificación existencial de $P(x)$ donde el dominio es el conjunto A.

Uso de notación de conjunto con cuantificadores

Escribir explícitamente el dominio de cuantificación

- $\forall x \in A\ P(x)$: Cuantificación universal de $P(x)$ donde el dominio es el conjunto A.
- $\exists x \in A\ P(x)$: Cuantificación existencial de $P(x)$ donde el dominio es el conjunto A.

Ejemplos

- $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$
- $\exists x \in \mathbb{Z}\ (x^2 = 1)$

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Especificación de conjuntos por predicados

Sea $P(x)$ un predicado, entonces definimos un conjunto S por

$$S = \{ x \mid P(x) \}.$$

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Definición (Conjunto)

Un conjunto es una colección desordenada de objetos, o elementos o miembros.

Especificación de conjuntos por predicados

Sea $P(x)$ un predicado, entonces definimos un conjunto S por

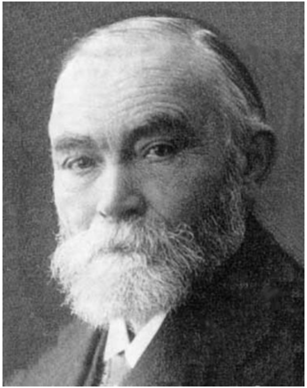
$$S = \{\, x \mid P(x) \,\}.$$

Ejemplo

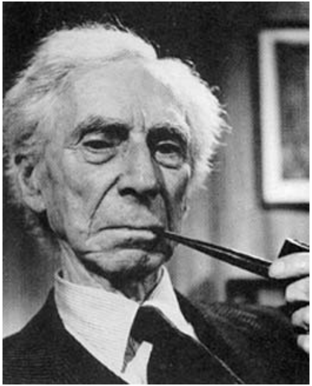
$$S = \{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 10\}.$$

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Gottlob Frege
(1848 – 1925)



Bertrand Russell
(1872 – 1970)



Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Carta de Russell a van Heijenoort[1]

Penrhyndeudraeth, 23 November 1962
Dear Professor van Heijenoort,

As I think about acts of integrity and grace, I realise there is nothing in my knowledge to compare with Frege's dedication to truth. His entire life's work was on the verge of completion, much of his work had been ignored to the benefit of men infinitely less capable, his second volume was about to be published, and upon finding that his fundamental assumption was in error, he responded with intellectual pleasure clearly submerging any feelings of personal disappointment. It was almost superhuman and a telling indication of that of which men are capable if their dedication is to creative work and knowledge instead of cruder efforts to dominate and be known.

Yours sincerely
Bertrand Russell

[1] [van Heijenoort 1967, pág. 127].

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Paradoja de Russell

Sea $S = \{ x \mid x \notin x \}$. Es decir, S contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismos.

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Paradoja de Russell

Sea $S = \{ x \mid x \notin x \}$. Es decir, S contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismos.

- Si $S \in S$, esto conduce a una contradicción.

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Paradoja de Russell

Sea $S = \{ x \mid x \notin x \}$. Es decir, S contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismos.

- Si $S \in S$, esto conduce a una contradicción.
- Si $S \notin S$, esto conduce a una contradicción.

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Paradoja de Russell

Sea $S = \{ x \mid x \notin x \}$. Es decir, S contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismos.

- Si $S \in S$, esto conduce a una contradicción.
- Si $S \notin S$, esto conduce a una contradicción.

Por lo tanto, el conjunto S no se puede definir.

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Paradoja de Russell

Sea $S = \{\, x \mid x \notin x \,\}$. Es decir, S contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismos.

- Si $S \in S$, esto conduce a una contradicción.
- Si $S \notin S$, esto conduce a una contradicción.

Por lo tanto, el conjunto S no se puede definir.

Problema: $S = \{\, x \mid P(x) \,\}$, para cualquier $P(x)$.

Teoría de conjuntos ingenua (Naïve set theory)

Paradoja de Russell

Sea $S = \{\, x \mid x \notin x \,\}$. Es decir, S contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismos.

- Si $S \in S$, esto conduce a una contradicción.
- Si $S \notin S$, esto conduce a una contradicción.

Por lo tanto, el conjunto S no se puede definir.

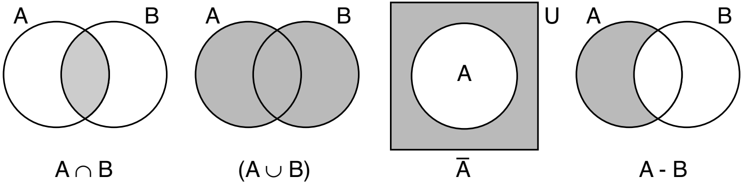
Problema: $S = \{\, x \mid P(x) \,\}$, para cualquier $P(x)$.

Algunas soluciones:

- Teoría de tipos acumulativa
- Teoría de conjuntos axiomática de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección (ZFC)

Operaciones entre conjuntos

Diagramas de Venn[1]



[1] Figura tomada de [Rosen 2000].

Operaciones entre conjuntos

Operaciones

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} \qquad \text{(unión)}$$
$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} \qquad \text{(intersección)}$$
$$\overline{A} = \{ x \mid x \notin A \} \qquad \text{(complemento)}$$
$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} \qquad \text{(diferencia)}$$

donde

1. $x \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x \in A)$ y
2. $\overline{A}$ está definido respecto a un conjunto universal U dado.

Operaciones entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 22.a, pág. 88)

¿Se puede concluir que $A = B$ si A, B y C son conjuntos tales que $A \cup C = B \cup C$? Justificar su respuesta.

Operaciones entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 22.a, pág. 88)

¿Se puede concluir que $A = B$ si A, B y C son conjuntos tales que $A \cup C = B \cup C$? Justificar su respuesta.

Respuesta: No.

Justificación (contraejemplo): Sea $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ y $C = \{1, 2\}$. Entonces $A \cup C = B \cup C$, pero $A \neq B$.

Operaciones entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 21.c, pág. 88)

Se puede concluir que $B = \emptyset$ si A y B son conjuntos tales que $A - B = A$? Justificar su respuesta.

Operaciones entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 21.c, pág. 88)

Se puede concluir que $B = \emptyset$ si A y B son conjuntos tales que $A - B = A$? Justificar su respuesta.

Respuesta: No.

Justificación (contraejemplo): Sea $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$. Entonces $A - B = A$, pero $B \neq \emptyset$.

Álgebras Booleanas

Teoría de conjuntos	Lógica proposicional
$\cup$	$\vee$
$\cap$	$\wedge$
$\overline{}$	$\neg$
$\emptyset$	$\mathbf{F}$
U	$\boldsymbol{V}$

Equivalencias lógicas

Notación

Símbolo	Significado
$\mathbf{V}$	Tautología
$\mathbf{F}$	Contradicción
$p \equiv q$	p y q son lógicamente equivalentes (es decir, $p \leftrightarrow q$ es una tautología)

Observación: Rosen [2004] introduce las constantes lógicas $\mathbf{V}$ y $\mathbf{F}$.

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica	Nombre
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Ley de la doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica	Nombre
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{F} \equiv p$	

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica	Nombre
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica	Nombre
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica	Nombre
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Leyes de negación

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica	Nombre
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Leyes de negación
$\neg \mathbf{V} \equiv \mathbf{F}$	Ley de negación de tautología
$\neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{V}$	Ley de negación de contradicción

Identidades básicas entre conjuntos

Identidad básica	Nombre
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leyes idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Ley de complementación
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leyes conmutativas
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Leyes asociativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leyes distributivas
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Leyes de De Morgan

Identidades básicas entre conjuntos

Identidad básica	Nombre
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Leyes de identidad
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leyes de dominación
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Leyes de absorción
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Leyes de complemento
$\overline{U} = \emptyset$	Ley del complemento del conjunto universal
$\overline{\emptyset} = U$	Ley del complemento del conjunto vacío

Identidades básicas entre conjuntos

Las identidades básicas entre conjuntos se pueden demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas.

Identidades básicas entre conjuntos

Las identidades básicas entre conjuntos se pueden demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas.

Ejemplo (Rosen [2004], problema 6.a, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de identidad $A \cup \emptyset = A$.

Identidades básicas entre conjuntos

Las identidades básicas entre conjuntos se pueden demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas.

Ejemplo (Rosen [2004], problema 6.a, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de identidad $A \cup \emptyset = A$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A \cup \emptyset &= \{x \mid x \in A \lor x \in \emptyset\} && \text{(def. unión)}\\
&= \{x \mid x \in A \lor \mathbf{F}\} && \text{(def. conjunto vacío)}\\
&= \{x \mid x \in A\} && \text{(ley lógica de identidad)}\\
&= A && \text{(def. } A\text{)}
\end{aligned}
$$

■

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 6.c, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de idempotencia $A \cup A = A$.

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 6.c, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de idempotencia $A \cup A = A$.

Demostración.

$$\begin{aligned} A \cup A &= \{x \mid x \in A \vee x \in A\} && \text{(def. unión)} \\ &= \{x \mid x \in A\} && \text{(ley lógica de idempotencia)} \\ &= A && \text{(def. } A\text{)} \end{aligned}$$

■

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 6.g, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de identidad $A \cap U = A$.

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 6.g, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de identidad $A \cap U = A$.

Demostración.

$$\begin{aligned} A \cap U &= \{x \mid x \in A \wedge x \in U\} && \text{(def. intersección)} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge \mathbf{V}\} && \text{(def. conjunto universal)} \\ &= \{x \mid x \in A\} && \text{(ley lógica de identidad)} \\ &= A && \text{(def. } A\text{)} \end{aligned}$$

■

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 6.f, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de dominación $A \cup U = U$.

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 6.f, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de dominación $A \cup U = U$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A \cup U &= \{x \mid x \in A \lor x \in U\} && \text{(def. unión)} \\
&= \{x \mid x \in A \lor \mathbf{V}\} && \text{(def. conjunto universal)} \\
&= \{x \mid \mathbf{V}\} && \text{(ley lógica de dominancia)} \\
&= \{x \mid x \in U\} && \text{(def. conjunto universal)} \\
&= U && \text{(def. } U\text{)}
\end{aligned}
$$

■

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 5, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de complementación $\overline{(\overline{A})} = A$.

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 5, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de complementación $\overline{(\overline{A})} = A$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\overline{(\overline{A})} &= \{x \mid x \notin \overline{A}\} && \text{(def. complemento)}\\
&= \{x \mid \neg(x \in \overline{A})\} && \text{(def. } \notin\text{)}\\
&= \{x \mid \neg(x \notin A)\} && \text{(def. complemento)}\\
&= \{x \mid \neg[\neg(x \in A)]\} && \text{(def. } \notin\text{)}\\
&= \{x \mid x \in A\} && \text{(ley lógica de la doble negación)}\\
&= A && \text{(def. } A\text{)}
\end{aligned}
$$

■

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 11, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de De Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Identidades básicas entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 11, pág. 87)

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley de De Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \{x \mid x \notin A \cup B\} && \text{(def. complemento)}\\
&= \{x \mid \neg(x \in A \cup B\} && \text{(def. } \notin\text{)}\\
&= \{x \mid \neg(x \in A \lor x \in B)\} && \text{(def. unión)}\\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \land \neg(x \in B)\} && \text{(ley lógica de De Morgan)}\\
&= \{x \mid x \notin A \land x \notin B\} && \text{(def. } \notin\text{)}\\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \land x \in \overline{B}\} && \text{(def. complemento)}\\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cap \overline{B}\} && \text{(def. intersección)}\\
&= \overline{A} \cap \overline{B} && \text{(def. } \overline{A} \cap \overline{B}\text{)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Identidades básicas entre conjuntos

Ejemplo

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley del complemento del conjunto universal $\overline{U} = \emptyset$.

Identidades básicas entre conjuntos

Ejemplo

Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas la ley del complemento del conjunto universal $\overline{U} = \emptyset$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\overline{U} &= \{x \mid x \notin U\} && \text{(def. complemento)}\\
&= \{x \mid \neg(x \in U)\} && \text{(def. } \notin\text{)}\\
&= \{x \mid \neg\mathbf{V}\} && \text{(def. conjunto universal)}\\
&= \{x \mid \mathbf{F}\} && \text{(ley lógica de negación de tautología)}\\
&= \{x \mid x \in \emptyset\} && \text{(def. conjunto vacío)}\\
&= \emptyset && \text{(def. } \emptyset\text{)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas podemos demostrar nuevas identidades entre conjuntos.

Nuevas identidades entre conjuntos

Empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas podemos demostrar nuevas identidades entre conjuntos.

Ejemplo (Rosen [2004], problema 6.e, pág. 87)

Sea A un conjunto. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $A - \emptyset = A$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas podemos demostrar nuevas identidades entre conjuntos.

Ejemplo (Rosen [2004], problema 6.e, pág. 87)

Sea A un conjunto. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $A - \emptyset = A$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A - \emptyset &= \{\, x \mid x \in A \land x \notin \emptyset \,\} && \text{(def. diferencia)} \\
&= \{\, x \mid x \in A \land \mathbf{V} \,\} && \text{(def. conjunto vacío)} \\
&= \{\, x \mid x \in A \,\} && \text{(ley lógica de identidad)} \\
&= A && \text{(def. } A\text{)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejemplo (Rosen [2004], problema 6.h, pág. 87)

Sea A un conjunto. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $\emptyset - A = \emptyset$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejemplo (Rosen [2004], problema 6.h, pág. 87)

Sea A un conjunto. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $\emptyset - A = \emptyset$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\emptyset - A &= \{x \mid x \in \emptyset \wedge x \notin A\} && \text{(def. diferencia)} \\
&= \{x \mid \mathbf{F} \wedge x \notin A\} && \text{(def. conjunto vacío)} \\
&= \{x \mid x \notin A \wedge \mathbf{F}\} && \text{(ley lógica conmutativa)} \\
&= \{x \mid \mathbf{F}\} && \text{(ley lógica de dominación)} \\
&= \{x \mid x \in \emptyset\} && \text{(def. conjunto vacío)} \\
&= \emptyset && \text{(def. } \emptyset\text{)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 12.d, pág. 87)

Sean A y B conjuntos. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (continuación)

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A \cap (B - A) &= \{\, x \mid x \in A \wedge x \in (B - A) \,\} && \text{(def. intersección)} \\
&= \{\, x \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin A) \,\} && \text{(def. diferencia)} \\
&= \{\, x \mid x \in A \wedge (x \notin A \wedge x \in B) \,\} && \text{(ley conmutativa)} \\
&= \{\, x \mid (x \in A \wedge x \notin A) \wedge x \in B \,\} && \text{(ley asociativa)} \\
&= \{\, x \mid (x \in A \wedge \neg(x \in A)) \wedge x \in B \,\} && \text{(def. } \notin\text{)} \\
&= \{\, x \mid \mathbf{F} \wedge x \in B \,\} && \text{(ley de negación)} \\
&= \{\, x \mid x \in B \wedge \mathbf{F} \,\} && \text{(ley de conmutativa)} \\
&= \{\, x \mid \mathbf{F} \,\} && \text{(ley de dominancia)} \\
&= \{\, x \mid x \in \emptyset \,\} && \text{(def. conjunto vacío)} \\
&= \emptyset && \text{(def. conjunto vacío)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 12.e, pág. 87)

Sea A y B conjuntos. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $A \cup (B - A) = A \cup B$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 12.e, pág. 87)

Sea A y B conjuntos. Demostrar empleando las definiciones de las operaciones entre conjuntos y las equivalencias lógicas que $A \cup (B - A) = A \cup B$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
& A \cup (B - A) \\
& = \{\, x \mid x \in A \lor x \in (B - A) \,\} && \text{(def. unión)} \\
& = \{\, x \mid x \in A \lor (x \in B \land x \notin A) \,\} && \text{(def. diferencia)} \\
& = \{\, x \mid (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \notin A) \,\} && \text{(ley distributiva)} \\
& = \{\, x \mid (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor \neg(x \in A)) \,\} && \text{(def. } \notin\text{)} \\
& = \{\, x \mid (x \in A \lor x \in B) \land \mathbf{V} \,\} && \text{(ley de negación)} \\
& = \{\, x \mid x \in A \lor x \in B \,\} && \text{(ley de identidad)} \\
& = A \cup B && \text{(def. unión)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Dadas las identidades básicas entre conjuntos, éstas se pueden emplear para obtener nuevas identidades entre conjuntos.

Nuevas identidades entre conjuntos

Dadas las identidades básicas entre conjuntos, éstas se pueden emplear para obtener nuevas identidades entre conjuntos.

Ejemplo (Rosen [2004], problema 16, pág. 87)

Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que si A y B son conjuntos, entonces $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Dadas las identidades básicas entre conjuntos, éstas se pueden emplear para obtener nuevas identidades entre conjuntos.

Ejemplo (Rosen [2004], problema 16, pág. 87)

Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que si A y B son conjuntos, entonces $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(ley distributiva)} \\ &= A \cap U && \text{(ley de complemento)} \\ &= A && \text{(ley de identidad)}\end{aligned}$$

■

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejemplo (continuación)

Una prueba diferente que $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= [(A \cap B) \cup A] \cap [(A \cap B) \cup \overline{B}] && \text{(ley distributiva)}\\
&= [A \cup (A \cap B)] \cap [(A \cap B) \cup \overline{B}] && \text{(ley conmutativa)}\\
&= A \cap [(A \cap B) \cup \overline{B}] && \text{(ley de absorción)}\\
&= A \cap [\overline{B} \cup (A \cap B)] && \text{(ley conmutativa)}\\
&= A \cap [(\overline{B} \cup A) \cap (\overline{B} \cup B)] && \text{(ley distributiva)}\\
&= A \cap [(\overline{B} \cup A) \cap U] && \text{(ley de complemento)}\\
&= A \cap (\overline{B} \cup A) && \text{(ley de identidad)}\\
&= A \cap (A \cup \overline{B}) && \text{(ley commutativa)}\\
&= A && \text{(ley de absorción)}
\end{aligned}
$$

■

Nuevas identidades entre conjuntos

Diferencia en términos de unión e intersección

$$A - B = A \cap \overline{B}.$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 14.e, pág. 87)

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 14.e, pág. 87)

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(B - A) \cup (C - A) &= (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A}) && \text{(def. diferencia)} \\
&= (\overline{A} \cap B) \cup (C \cap \overline{A}) && \text{(ley conmutativa)} \\
&= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) && \text{(ley conmutativa)} \\
&= \overline{A} \cap (B \cup C) && \text{(ley distributiva)} \\
&= (B \cup C) \cap \overline{A} && \text{(ley conmutativa)} \\
&= (B \cup A) - A && \text{(def. diferencia)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 18, pág. 88)

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 18, pág. 88)

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

$$
\begin{aligned}
&(A - C) - (B - C) \\
&= (A - C) \cap \overline{B - C} && \text{(def. diferencia)} \\
&= (A - C) \cap \overline{B \cap \overline{C}} && \text{(def. diferencia)} \\
&= (A - C) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) && \text{(leyes de De Morgan)} \\
&= (A - C) \cap (\overline{B} \cup C) && \text{(ley de complementación)} \\
&= ((A - C) \cap \overline{B}) \cup ((A - C) \cap C) && \text{(ley distributiva)} \\
&= ((A - C) \cap \overline{B}) \cup ((A \cap \overline{C}) \cap C) && \text{(def. diferencia)} \\
&= ((A - C) \cap \overline{B}) \cup (A \cap (\overline{C} \cap C)) && \text{(ley asociativa)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (continuación)

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&= ((A - C) \cap \overline{B}) \cup (A \cap \emptyset) && \text{(ley de complemento)} \\
&= ((A - C) \cap \overline{B}) \cup \emptyset && \text{(ley de complemento)} \\
&= (A - C) \cap \overline{B} && \text{(ley de complemento)} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} && \text{(def. diferencia)} \\
&= A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) && \text{(ley asociativa)} \\
&= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{(ley conmutativa)} \\
&= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} && \text{(ley asociativa)} \\
&= (A - B) \cap \overline{C} && \text{(def. diferencia)} \\
&= (A - B) - C && \text{(def. diferencia)}
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Definición (Diferencia simétrica)

Sean A y B conjuntos. La diferencia simétrica de A y B, denotada por $A \oplus B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que bien están en A o bien están en B, pero no en ambos.

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 28, pág. 88)

Sean A y B conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (continuación)

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= (A \cup B) - (A \cap B) && \text{(def. dif. simétrica)}\\
&= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} && \text{(def. diferencia)}\\
&= \overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B) && \text{(ley commutativa)}\\
&= [\overline{(A \cap B)} \cap A] \cup [\overline{(A \cap B)} \cap B] && \text{(ley distributiva)}\\
&= [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap A] \cup [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B] && \text{(leyes de De Morgan)}\\
&= [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] && \text{(leyes commutativa)}\\
&= [(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})] \cup [(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})] && \text{(ley distributiva)}\\
&= [\emptyset \cup (A \cap \overline{B})] \cup [(B \cap \overline{A}) \cup \emptyset] && \text{(ley de complemento)}\\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(ley de identidad}\\
&= (A - B) \cup (B - A) && \text{(def. diferencia)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 29.d, pág. 88)

Sean A y B conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $A \oplus \overline{A} = U$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 29.d, pág. 88)

Sean A y B conjuntos. Demostrar empleando las identidades básicas entre conjuntos que $A \oplus \overline{A} = U$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
A \oplus \overline{A} &= (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A) && \text{(ejercicio pág. 128)} \\
&= (A \cap \overline{\overline{A}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) && \text{(def. diferencia)} \\
&= (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) && \text{(ley de complementación)} \\
&= A \cup \overline{A} && \text{(ley de idempotencia)} \\
&= U && \text{(ley de complemento)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (Rosen [2004], problema 30.d, pág. 88)

La diferencia simétrica entre conjuntos satisface las siguientes propiedades:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A), \tag{1}$$

$$A \oplus A = \emptyset, \tag{2}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C). \tag{3}$$

Empleando las propiedades anteriores demostrar que $(A \oplus B) \oplus B = A$.

Nuevas identidades entre conjuntos

Ejercicio (continuación)

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus B &= A \oplus (B \oplus B) && \text{(Eq. 3)}\\
&= A \oplus \emptyset && \text{(Eq. 2)}\\
&= (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) && \text{(Eq. 1)}\\
&= (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) && \text{(def. diferencia)}\\
&= (A \cap U) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) && \text{(ley del complemento de } \emptyset)\\
&= A \cup (\emptyset \cap \overline{A}) && \text{(ley de identidad)}\\
&= A \cup \emptyset && \text{(ley de dominancia)}\\
&= A && \text{(ley de identidad)}
\end{aligned}
$$

■

Uniones e intersecciones generalizadas

Definición (Unión e intersección de una colección indexada de conjuntos)

Sea $A_1, \ldots, A_n$ una colección indexada de conjuntos. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Uniones e intersecciones generalizadas

Ejemplo

Sea $A_i = [i, \infty)$, con $1 \leq i < \infty$. Es decir, $A_1 = [1, \infty)$, $A_2 = [2, \infty)$, $\ldots$

Hallar el valor de:

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
2. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Uniones e intersecciones generalizadas

Ejemplo

Sea $A_i = [i, \infty)$, con $1 \leq i < \infty$. Es decir, $A_1 = [1, \infty)$, $A_2 = [2, \infty)$, $\ldots$

Hallar el valor de:

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
2. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Solución:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = [1, \infty) \\ = A_1.$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = [n, \infty) \\ = A_n.$$

Sucesor de un conjunto

Definición (Sucesor de un conjunto)

El sucesor del conjunto A es el conjunto $A \cup \{A\}$.

Sucesor de un conjunto

Definición (Sucesor de un conjunto)

El sucesor del conjunto A es el conjunto $A \cup \{A\}$.

Ejercicio (Rosen [2004], problema 47.c, pág. 89)

Hallar el sucesor del conjunto $\{\emptyset\}$.

Sucesor de un conjunto

Definición (Sucesor de un conjunto)

El sucesor del conjunto A es el conjunto $A \cup \{A\}$.

Ejercicio (Rosen [2004], problema 47.c, pág. 89)

Hallar el sucesor del conjunto $\{\emptyset\}$.

Solución: $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$

Sucesor de un conjunto

Definición (Sucesor de un conjunto)

El sucesor del conjunto A es el conjunto $A \cup \{A\}$.

Ejercicio (Rosen [2004], problema 47.c, pág. 89)

Hallar el sucesor del conjunto $\{\emptyset\}$.

Solución: $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$

Ejercicio (Rosen [2004], problema 48, pág. 89)

¿Cuántos elementos tiene el sucesor de un conjunto de n elementos?

Sucesor de un conjunto

Definición (Sucesor de un conjunto)

El sucesor del conjunto A es el conjunto $A \cup \{A\}$.

Ejercicio (Rosen [2004], problema 47.c, pág. 89)

Hallar el sucesor del conjunto $\{\emptyset\}$.

Solución: $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$

Ejercicio (Rosen [2004], problema 48, pág. 89)

¿Cuántos elementos tiene el sucesor de un conjunto de n elementos?

Solución: $n + 1$ elementos

Representación de conjuntos en un ordenador

Lectura: Rosen [2004, págs. 85–87].

Referencias

- Copi, Irving M. [1954] (2001). Lógica Simbólica. Trad. por Sestier Boulier, Andrés. 2.ª ed., 20.ª reimpresión. Compañía Editorial Continental (vid. pág. 5).
- Hurley, Patrick J. y Watson, Lori [1972] (2016). A Concise Introduction to Logic. 13.ª ed. Cengage Learning (vid. pág. 5).
- Rosen, Kenneth H. (2000). Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics. CRC Press (vid. pág. 77).
- — [1988] (2004). Matemática Discreta y sus Aplicaciones. 5.ª ed. Traducido por José Manuel Pérez Morales y otros. McGraw-Hill (vid. págs. 5, 17, 18, 23, 24, 29-35, 48-53, 58-60, 63, 79-82, 84, 93-105, 108-113, 115-119, 122-125, 128, 130-132, 137-142).
- — [1988] (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. 7.ª ed. McGraw-Hill (vid. pág. 13).
- Sierra A., Manuel (2010). Conjuntos y Relaciones. MS-Print (vid. págs. 5, 31-33, 36-41).
- van Heijenoort, Jean, ed. (1967). From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Source Books in the History of the Sciences. Harvard University Press (vid. pág. 70).