

# CM0260 Lógica

## La lógica de las relaciones

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2015-2

(Última actualización: 29 de junio de 2024)

# Contexto

---

## Lógica de predicados (de primer orden)

- Predicados monádicos (atributos)
- Predicados poliádicos (relaciones)

Deaño [1994] comienza la sección acerca de la lógica de las relaciones con el siguiente ejemplo [Deaño 1994, págs. 237–8]:

## Ejemplo

«Soy detective privado y tengo mi licencia desde hace bastante tiempo. Soy un tipo solitario, no estoy casado, estoy entrando en la edad madura y no soy rico. He estado en la cárcel más de una vez y no me ocupo de divorcios. Me gusta la bebida, las mujeres (...) y algunas otras cosas. No soy muy del agrado de los polizontes (...). Soy hijo natural, mis padres han muerto, no tengo hermanos ni hermanas, y si alguna vez llegan a dejarme tieso en una callejuela oscura (...), nadie, ni hombre ni mujer, sentirá que ha desaparecido el motivo y fundamento de su vida.» [Raymon Chandler (1972). *El largo adiós*. Versión castellana de J. A. Lara. Barral Editores, pág. 114.]

# Motivación

---

## Ejemplo (continuación)

Dicho de otro modo:  $Da \wedge Ta \wedge Sa \wedge \sim(\forall x)Cax \wedge Ea \wedge \sim Ra \wedge E'a \wedge (\forall x)(D'x \supset \sim Oax) \wedge$   
 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(Bx \wedge My \wedge \sim Bz \wedge \sim Mz \wedge \sim Bw \wedge \sim Mw \wedge Gxa \wedge Gya \wedge Gza \wedge Gwa) \wedge$   
 $(\forall x)(Px \supset \sim Aax) \wedge (\forall x)(\forall y)[(Pxa \wedge Mya) \supset \sim Cxy \wedge M'x \wedge M'y] \wedge \sim(\exists x)\sim(\exists y)[Hx \wedge$   
 $My \wedge (Hxa \vee Hya)] \wedge (\exists x)(T'xa \supset \sim(\exists y)[(Hy \vee My) \wedge S'y]).$

# Motivación

## Ejemplo (continuación)

Dicho de otro modo:  $Da \wedge Ta \wedge Sa \wedge \sim(\forall x)Cax \wedge Ea \wedge \sim Ra \wedge E'a \wedge (\forall x)(D'x \supset \sim Oax) \wedge (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(Bx \wedge My \wedge \sim Bz \wedge \sim Mz \wedge \sim Bw \wedge \sim Mw \wedge Gxa \wedge Gya \wedge Gza \wedge Gwa) \wedge (\forall x)(Px \supset \sim Aax) \wedge (\forall x)(\forall y)[(Pxa \wedge Mya) \supset \sim Cxy \wedge M'x \wedge M'y] \wedge \sim(\exists x)\sim(\exists y)[Hx \wedge My \wedge (Hxa \vee Hya)] \wedge (\exists x)(T'xa \supset \sim(\exists y)[(Hy \vee My) \wedge S'y])$ .

( $Dx$ :  $x$  es detective privado.  $Tx$ :  $x$  tiene su licencia desde hace bastante tiempo.  $Sx$ :  $x$  es un tipo solitario.  $Cxy$ :  $x$  está casado con  $y$ .  $Ex$ :  $x$  está entrando en la edad madura.  $Rx$ :  $x$  es rico.  $E'x$ :  $x$  ha estado en la cárcel más de una vez.  $D'x$ :  $x$  es un divorcio.  $Oxy$ :  $x$  se ocupa de  $y$ .  $Bx$ :  $x$  es una bebida.  $Mx$ :  $x$  es una mujer.  $Gxy$ :  $x$  le gusta a  $y$ .  $Px$ :  $x$  es un polizone.  $Axy$ :  $x$  no es muy del agrado de  $y$ .  $Pxy$ :  $x$  es padre de  $y$ .  $Mxy$ :  $x$  es madre de  $y$ .  $M'x$ :  $x$  está muerto.  $Hx$ :  $x$  es un hombre.  $Hxy$ :  $x$  es hermano(a) de  $y$ .  $Txy$ :  $x$  deja tieso a  $y$  en una callejuela oscura.  $S'x$ :  $x$  siente que ha desaparecido el motivo y fundamento de su vida.  $a$ : El individuo quien habla.)

# Motivación

---

## Ejemplo (continuación)

«Es decir:  $a$  es detective privado y  $a$  tiene su licencia desde hace bastante tiempo y  $a$  es un tipo solitario y no hay ningún  $x$  tal que  $a$  esté casado con  $x$  y  $a$  está entrando en la edad madura y  $a$  no es rico y  $a$  ha estado en la cárcel más de una vez y para todo  $x$ , si  $x$  es un divorcio entonces  $a$  no se ocupa de  $x$  y hay algún  $x$  tal que  $x$  es una bebida y  $x$  gusta a  $a$  y hay algún  $y$  tal que  $y$  es una mujer e  $y$  gusta a  $a$  y hay algún  $z$  y algún  $w$  que no son bebidas ni mujeres y que gustan a  $a$ , y para todo  $x$ , si  $x$  es un polizone, entonces  $a$  no es muy del agrado de  $x$ , y para todo  $x$  y para todo  $y$  si  $x$  es padre de  $a$  e  $y$  es madre de  $a$  entonces  $x$  y  $y$  no estuvieron casados y  $x$  está muerto e  $y$  está muerta, y no hay ningún  $x$  ni ningún  $y$  tales que si  $x$  es varón e  $y$  mujer,  $x$  sea hermano de  $a$  o  $y$  sea hermana de  $a$ , y si hay algún  $x$  tal que  $x$  deja tieso a  $a$  en una callejuela oscura, entonces no habrá ningún  $y$ , sea varón o sea mujer, que sienta que ha desaparecido el motivo y fundamento de su vida.»

# Motivación

---

Con base en el ejemplo anterior, Deaño [1994] concluye que si el lenguaje lógico no dispusiera de predicados poliádicos:

# Motivación

---

Con base en el ejemplo anterior, Deaño [1994] concluye que si el lenguaje lógico no dispusiera de predicados poliádicos:

- nadie podría relatar en él su vida,

# Motivación

---

Con base en el ejemplo anterior, Deaño [1994] concluye que si el lenguaje lógico no dispusiera de predicados poliádicos:

- nadie podría relatar en él su vida,
- tampoco sería posible traducir al simbolismo lógico los más sencillos enunciados de la ciencia. No sería posible enunciar siquiera que 2 es menor que 3,

# Motivación

---

Con base en el ejemplo anterior, Deaño [1994] concluye que si el lenguaje lógico no dispusiera de predicados poliádicos:

- nadie podría relatar en él su vida,
- tampoco sería posible traducir al simbolismo lógico los más sencillos enunciados de la ciencia. No sería posible enunciar siquiera que 2 es menor que 3,
- y muchos sería los razonamientos que, siendo formalmente válidos, se verían privados de su reconocimiento como tales.

# Relaciones

---

## Predicados

- Una variable libre: El predicado representa un **atributo**.

# Relaciones

---

## Predicados

- Una variable libre: El predicado representa un **atributo**.
- Dos variables libres: El predicado representa una **relación** binaria o diádica.

## Predicados

- Una variable libre: El predicado representa un **atributo**.
- Dos variables libres: El predicado representa una **relación** binaria o diádica.
- Tres variables libres: El predicado representa una **relación** ternaria o triádica.

## Predicados

- Una variable libre: El predicado representa un **atributo**.
- Dos variables libres: El predicado representa una **relación** binaria o diádica.
- Tres variables libres: El predicado representa una **relación** ternaria o triádica.
- $n$  variables libres: El predicado representa una **relación**  $n$ -ádica.

# Representación de enunciados: Proposiciones sin cuantificadores

---

## Ejemplo

Lincon y Grant fueron presidentes.

$Px$ :  $x$  fue presidente

$l$ : Lincon

$g$ : Grant

Representación:  $Pl \wedge Pg$

## Representación de enunciados: Proposiciones sin cuantificadores

---

### Ejemplo

Lincon y Grant fueron presidentes.

$Px$ :  $x$  fue presidente

$l$ : Lincon

$g$ : Grant

Representación:  $Pl \wedge Pg$

### Ejemplo

Lincon y Grant eran amigos.

$Axy$ :  $x$  y  $y$  eran amigos.

Representación:  $Alg$

# Representación de enunciados: Proposiciones sin cuantificadores

---

## Ejemplo

Lincon y Grant fueron presidentes.

$Px$ :  $x$  fue presidente

$l$ : Lincon

$g$ : Grant

Representación:  $Pl \wedge Pg$

## Ejemplo

Lincon y Grant eran amigos.

$Axy$ :  $x$  y  $y$  eran amigos.

Representación:  $Alg$

Observación:  $Axy$ :  $x$  era amigo de  $y$ .

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

A Elena le gusta David. A cualquiera que le guste David le gusta Tomás. A Elena solo le gustan los hombres bien parecidos. Por lo tanto, Tomás es un hombre bien parecido.

$e$ : Elena

$d$ : David

$t$ : Tomás

$Gxy$ : A  $x$  le gusta  $y$

$Px$ :  $x$  es un hombre bien parecido

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

A Elena le gusta David. A cualquiera que le guste David le gusta Tomás. A Elena solo le gustan los hombres bien parecidos. Por lo tanto, Tomás es un hombre bien parecido.

$e$ : Elena

$d$ : David

$t$ : Tomás

$Gxy$ : A  $x$  le gusta  $y$

$Px$ :  $x$  es un hombre bien parecido

$$1 \quad Ged$$

$$2 \quad (\forall x)(Gxd \supset Gxt)$$

$$3 \quad (\forall x)(Gex \supset Px) \quad / \therefore Pt$$

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

- $a$  atrae todo (todo es atraído por  $a$ ):  $(\forall x)Aax$

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

- $a$  atrae todo (todo es atraído por  $a$ ):  $(\forall x)Aax$
- $a$  atrae algo (algo es atraído por  $a$ ):  $(\exists x)Aax$

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

- $a$  atrae todo (todo es atraído por  $a$ ):  $(\forall x)Aax$
- $a$  atrae algo (algo es atraído por  $a$ ):  $(\exists x)Aax$
- Todo atrae a  $a$  ( $a$  es atraído por todo):  $(\forall x)Axa$

# Representación de enunciados: Proposiciones con solo un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

- $a$  atrae todo (todo es atraído por  $a$ ):  $(\forall x)Aax$
- $a$  atrae algo (algo es atraído por  $a$ ):  $(\exists x)Aax$
- Todo atrae a  $a$  ( $a$  es atraído por todo):  $(\forall x)Axa$
- Algo atrae a  $a$  ( $a$  es atraído por algo):  $(\exists x)Axa$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$
2. Todo es atraído por todo:  $(\forall y)(\forall x)Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$
2. Todo es atraído por todo:  $(\forall y)(\forall x)Axy$
3. Algo atrae algo:  $(\exists x)(\exists y)Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$
2. Todo es atraído por todo:  $(\forall y)(\forall x)Axy$
3. Algo atrae algo:  $(\exists x)(\exists y)Axy$
4. Algo es atraído por algo:  $(\exists y)(\exists x)Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$
2. Todo es atraído por todo:  $(\forall y)(\forall x)Axy$
3. Algo atrae algo:  $(\exists x)(\exists y)Axy$
4. Algo es atraído por algo:  $(\exists y)(\exists x)Axy$
5. Nada atrae cosa alguna:  $(\forall x)(\forall y)\sim Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$
2. Todo es atraído por todo:  $(\forall y)(\forall x)Axy$
3. Algo atrae algo:  $(\exists x)(\exists y)Axy$
4. Algo es atraído por algo:  $(\exists y)(\exists x)Axy$
5. Nada atrae cosa alguna:  $(\forall x)(\forall y)\sim Axy$
6. Nada es atraído por cosa alguna:  $(\forall y)(\forall x)\sim Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

1. Todo atrae todo:  $(\forall x)(\forall y)Axy$
2. Todo es atraído por todo:  $(\forall y)(\forall x)Axy$
3. Algo atrae algo:  $(\exists x)(\exists y)Axy$
4. Algo es atraído por algo:  $(\exists y)(\exists x)Axy$
5. Nada atrae cosa alguna:  $(\forall x)(\forall y)\sim Axy$
6. Nada es atraído por cosa alguna:  $(\forall y)(\forall x)\sim Axy$

## Observación

El orden de los cuantificadores **iguales** no importa. Las proposiciones 1 y 2, 3 y 4, y 5 y 6 en el ejemplo anterior son lógicamente equivalentes.

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

7. Todo atrae algo:  $(\forall x)(\exists y)Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

7. Todo atrae algo:  $(\forall x)(\exists y)Axy$
8. Algo es atraído por todo:  $(\exists y)(\forall x)Axy$

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

$Axy$ :  $x$  atrae a  $y$

7. Todo atrae algo:  $(\forall x)(\exists y)Axy$

8. Algo es atraído por todo:  $(\exists y)(\forall x)Axy$

## Observación

El orden de los cuantificadores **diferentes** importa. Las proposiciones 7 y 8 del ejemplo anterior no son lógicamente equivalentes.

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

Proposición	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
$(\forall x)(\exists y) x \geq y$	✓	✓
$(\exists y)(\forall x) x \geq y$	✓	×

# Representación de enunciados: Proposiciones con más de un cuantificador

---

## Ejemplo

Proposición	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
$(\forall x)(\exists y) x \geq y$	✓	✓
$(\exists y)(\forall x) x \geq y$	✓	×

Proposición	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
$(\forall y)(\exists x) x \geq y$	✓	✓
$(\exists x)(\forall y) x \geq y$	×	×

# Representación de enunciados

---

Ejemplo (Copi [2001], translación paso a paso, pág. 150)

1. Cualquiera que prometa todo a todos está seguro de decepcionar a alguien.

# Representación de enunciados

---

Ejemplo (Copi [2001], translación paso a paso, pág. 150)

1. Cualquiera que prometa todo a todos está seguro de decepcionar a alguien.
2.  $(\forall x) \{ [(x \text{ es una persona}) \wedge (x \text{ promete todo a todos})] \supset [x \text{ decepciona a alguien}] \}$

# Representación de enunciados

---

Ejemplo (Copi [2001], translación paso a paso, pág. 150)

1. Cualquiera que prometa todo a todos está seguro de decepcionar a alguien.

2.  $(\forall x)\{[(x \text{ es una persona}) \wedge (x \text{ promete todo a todos})] \supset [x \text{ decepciona a alguien}]\}$

3.  $x$  promete todo a todos:

$(\forall y)[(y \text{ es una persona}) \supset (x \text{ promete todo a } y)]$

es decir

$(\forall y)[(y \text{ es una persona}) \supset (\forall z)(x \text{ promete } z \text{ a } y)]$

# Representación de enunciados

---

Ejemplo (Copi [2001], translación paso a paso, pág. 150)

1. Cualquiera que prometa todo a todos está seguro de decepcionar a alguien.

2.  $(\forall x)\{[(x \text{ es una persona}) \wedge (x \text{ promete todo a todos})] \supset [x \text{ decepciona a alguien}]\}$

3.  $x$  promete todo a todos:

$(\forall y)[(y \text{ es una persona}) \supset (x \text{ promete todo a } y)]$

es decir

$(\forall y)[(y \text{ es una persona}) \supset (\forall z)(x \text{ promete } z \text{ a } y)]$

4.  $x$  decepciona a alguien:

$(\exists u)[(u \text{ es una persona}) \wedge (x \text{ decepciona a } u)]$

# Representación de enunciados

---

## Ejemplo (continuación)

5.  $(\forall x)\{\{(x \text{ es una persona}) \wedge (\forall y)[(y \text{ es una persona}) \supset (\forall z)(x \text{ promete } z \text{ a } y)]\} \supset (\exists u)[(u \text{ es una persona}) \wedge (x \text{ decepciona a } u)]\}$

# Representación de enunciados

---

## Ejemplo (continuación)

$$5. (\forall x)\{\{(x \text{ es una persona}) \wedge (\forall y)[(y \text{ es una persona}) \supset (\forall z)(x \text{ promete } z \text{ a } y)]\} \supset (\exists u)[(u \text{ es una persona}) \wedge (x \text{ decepciona a } u)]\}$$

$$6. (\forall x)\{\{Px \wedge (\forall y)[Py \supset (\forall z)Pxyz]\} \supset (\exists u)(Pu \wedge Dxu)\}$$

( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Pxyz$ :  $x$  promete  $y$  a  $z$ .  $Dxy$ :  $x$  decepciona a  $y$ .)

**Observación:** Símbolos  $Px$  y  $Pxyz$ .

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.3, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Un león muerto es más peligroso que un perro vivo. ( $Lx$ :  $x$  es un león.  $Vx$ :  $x$  está vivo.  $Px$ :  $x$  es un perro.  $Pxy$ :  $x$  es más peligro que  $y$ ).

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.3, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Un león muerto es más peligroso que un perro vivo. ( $Lx$ :  $x$  es un león.  $Vx$ :  $x$  está vivo.  $Px$ :  $x$  es un perro.  $Pxy$ :  $x$  es más peligro que  $y$ ).

Representación:  $(\forall x)(\forall y)\{[(Lx \wedge \sim Vx) \wedge (Py \wedge Vy)] \supset Pxy\}$

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.6, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Cualquiera que consulte a un psiquiatra debiera hacerse examinar de la cabeza. ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Sx$ :  $x$  es un psiquiatra.  $Dx$ :  $x$  debiera hacerse examinar de la cabeza.  $Cxy$ :  $x$  consulta a  $y$ .)

## Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.6, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Cualquiera que consulte a un psiquiatra debiera hacerse examinar de la cabeza. ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Sx$ :  $x$  es un psiquiatra.  $Dx$ :  $x$  debiera hacerse examinar de la cabeza.  $Cxy$ :  $x$  consulta a  $y$ .)

Representación:  $(\forall x)\{[Px \wedge (\exists y)(Sy \wedge Cxy)] \supset Dx\}$

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.12, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Todo estudiante hace algunos problemas pero ningún estudiante hace todos los problemas ( $Ex$ :  $x$  es un estudiante.  $Px$ :  $x$  es un problema.  $Hxy$ :  $x$  hace  $y$ .)

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.12, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Todo estudiante hace algunos problemas pero ningún estudiante hace todos los problemas ( $Ex$ :  $x$  es un estudiante.  $Px$ :  $x$  es un problema.  $Hxy$ :  $x$  hace  $y$ .)

Representación: La palabra «pero» indica que debemos representar la oración empleando una conjunción.

«Todo estudiante hace algunos problemas» se representa por:

$$(\forall x)[Ex \supset (\exists y)(Py \wedge Hxy)].$$

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.12, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Todo estudiante hace algunos problemas pero ningún estudiante hace todos los problemas ( $Ex$ :  $x$  es un estudiante.  $Px$ :  $x$  es un problema.  $Hxy$ :  $x$  hace  $y$ .)

Representación: La palabra «pero» indica que debemos representar la oración empleando una conjunción.

«Todo estudiante hace algunos problemas» se representa por:

$$(\forall x)[Ex \supset (\exists y)(Py \wedge Hxy)].$$

**Observación:** Una representación errónea sería

$$(\forall x)(\exists y)[(Ex \wedge Py) \supset Hxy]$$

(piense en un universo con un individuo  $a$  tal que  $Ea$  y  $\sim Pa$ ).

# Representación de enunciados

---

## Ejercicio (continuación)

«Ningún estudiante hace todos los problemas» se representa por:

$$\sim(\exists x)[Ex \wedge (\forall y)(Py \supset Hxy)] \text{ o}$$
$$(\forall x)[Ex \supset (\exists y)(Py \wedge \sim Hxy)].$$

Una representación de la oración es:

$$(\forall x)[Ex \supset (\exists y)(Py \wedge Hxy)] \wedge \sim(\exists x)[Ex \wedge (\forall y)(Py \supset Hxy)].$$

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.14, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Todo hijo tiene un padre, pero no todo padre tiene un hijo ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Hx$ :  $x$  es un hombre.  $Pxy$ :  $x$  es padre de  $y$ .)

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.14, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Todo hijo tiene un padre, pero no todo padre tiene un hijo ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Hx$ :  $x$  es un hombre.  $Pxy$ :  $x$  es padre de  $y$ .)

Representación: La palabra «pero» indica que debemos representar la oración empleando una conjunción.

«Todo hijo tiene un padre» se representa por:

$$(\forall x)[(Px \wedge Hx) \supset (\exists y)Pyx].$$

# Representación de enunciados

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.14, pág. 154)

Simbolizar la siguiente oración usando los símbolos indicados.

Todo hijo tiene un padre, pero no todo padre tiene un hijo ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Hx$ :  $x$  es un hombre.  $Pxy$ :  $x$  es padre de  $y$ .)

Representación: La palabra «pero» indica que debemos representar la oración empleando una conjunción.

«Todo hijo tiene un padre» se representa por:

$$(\forall x)[(Px \wedge Hx) \supset (\exists y)Pyx].$$

**Observación:** Una representación errónea sería

$$(\forall x)(\exists y)[(Px \wedge Hx) \supset Pyx]$$

(piense en un universo con dos individuos  $a$  y  $b$  tal que  $\sim Ha$ ,  $Hb$ ,  $\sim Pa$ ,  $Pb$ ,  $Paa$ ,  $\sim Pab$ ,  $\sim Pba$  y  $\sim Pbb$ ).

# Representación de enunciados

---

## Ejercicio (continuación)

«No todo padre tiene un hijo» se representa por:

$$(\exists x)(\forall y)[(Px \wedge Pxy) \supset \sim Hy] \text{ o } \sim(\forall x)(\exists y)(Px \wedge Pxy \wedge Hy).$$

Una representación de la oración es:

$$(\forall x)[(Px \wedge Hx) \supset (\exists y)Pxy] \wedge (\exists x)(\forall y)[(Px \wedge Pxy) \supset \sim Hy].$$

# Representación de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.2, pág. 159)

Simbolizar el siguiente argumento usando los símbolos indicados.

Todos los círculos son figuras. Por lo tanto, todos los que trazan círculos trazan figuras. ( $Cx$ :  $x$  es un círculo.  $Fx$ :  $x$  es una figura.  $Txy$ :  $x$  traza  $y$ .)

# Representación de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.2, pág. 159)

Simbolizar el siguiente argumento usando los símbolos indicados.

Todos los círculos son figuras. Por lo tanto, todos los que trazan círculos trazan figuras. ( $Cx$ :  $x$  es un círculo.  $Fx$ :  $x$  es una figura.  $Txy$ :  $x$  traza  $y$ .)

Representación:

$$1 \quad (\forall x)(Cx \supset Fx) \quad / \therefore (\forall x)(\forall y)[(Cx \wedge Tyx) \supset (Fx \wedge Tyx)]$$

# Representación de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.3, pág. 159)

Simbolizar el siguiente argumento usando los símbolos indicados.

Cualquier amigo de Juan es un amigo de Pedro. Por lo tanto, cualquiera que conozca a un amigo de Juan conoce a un amigo de Pedro. ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Axy$ :  $x$  es un amigo de  $y$ .  $Cxy$ :  $x$  conoce a  $y$ .  $j$ : Juan.  $p$ : Pedro.)

# Representación de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.3, pág. 159)

Simbolizar el siguiente argumento usando los símbolos indicados.

Cualquier amigo de Juan es un amigo de Pedro. Por lo tanto, cualquiera que conozca a un amigo de Juan conoce a un amigo de Pedro. ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Axy$ :  $x$  es un amigo de  $y$ .  $Cxy$ :  $x$  conoce a  $y$ .  $j$ : Juan.  $p$ : Pedro.)

Representación:

$$1 \quad (\forall x)(Axj \supset Axp)$$

$$/ \therefore (\forall x)(\forall y)[(Px \wedge Cxy \wedge Ayj) \supset (Cxy \wedge Ayp)]$$

## Representación de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 160)

Simbolizar el siguiente argumento usando los símbolos indicados.

Todo lo que hay en mi escritorio es una obra maestra. Quienquiera que escriba una obra maestra es un genio. Alguna persona desconocida escribió alguna de las novelas que hay en mi escritorio. Por lo tanto, alguna persona desconocida es un genio. ( $Ex$ :  $x$  está en mi escritorio.  $Mx$ :  $x$  es una obra maestra.  $Px$ :  $x$  es una persona.  $Gx$ :  $x$  es un genio.  $Dx$ :  $x$  es un desconocido.  $Nx$ :  $x$  es una novela.  $Exy$ :  $x$  escribió  $y$ ).

# Representación de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 160)

Simbolizar el siguiente argumento usando los símbolos indicados.

Todo lo que hay en mi escritorio es una obra maestra. Quienquiera que escriba una obra maestra es un genio. Alguna persona desconocida escribió alguna de las novelas que hay en mi escritorio. Por lo tanto, alguna persona desconocida es un genio. ( $Ex$ :  $x$  está en mi escritorio.  $Mx$ :  $x$  es una obra maestra.  $Px$ :  $x$  es una persona.  $Gx$ :  $x$  es un genio.  $Dx$ :  $x$  es un desconocido.  $Nx$ :  $x$  es una novela.  $Exy$ :  $x$  escribió  $y$ ).

Representación:

$$1 \quad (\forall x)(Ex \supset Mx)$$

$$2 \quad (\forall x)[(Px \wedge (\exists y)(Exy \wedge My)) \supset Gx]$$

$$3 \quad (\exists x)(\exists y)(Px \wedge Dx \wedge Ny \wedge Ey \wedge Exy) \quad / \therefore (\exists x)(Px \wedge Dx \wedge Gx)$$

# Invalidez de argumentos empleado universos finitos

---

## Ejemplo

Demuestre semánticamente la invalidez del argumento  $(\forall x)(\exists y)Axy \quad / \therefore (\exists y)(\forall x)Axy$ .

# Invalidez de argumentos empleado universos finitos

---

## Ejemplo

Demuestre semánticamente la invalidez del argumento  $(\forall x)(\exists y)Axy \quad / \therefore (\exists y)(\forall x)Axy$ .

Para dos individuos  $a$  y  $b$ :

$$\begin{aligned}(\forall x)(\exists y)Axy &\equiv (\exists y)Aay \wedge (\exists y)Aby \\ &\equiv (Aaa \vee Aab) \wedge (Aba \vee Abb)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\exists y)(\forall x)Axy &\equiv (\forall x)Axa \vee (\forall x)Axb \\ &\equiv (Aaa \wedge Aba) \vee (Aab \wedge Abb)\end{aligned}$$

# Invalidez de argumentos empleado universos finitos

---

## Ejemplo (continuación)

$$\text{Proposiciones: } \frac{Aaa \quad Aab \quad Aba \quad Abb}{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1}$$

$$\text{Premisa: } \frac{(Aaa \vee Aab) \wedge (Aba \vee Abb)}{1}$$

$$\text{Conclusión: } \frac{(Aaa \wedge Aba) \vee (Aab \wedge Abb)}{0}$$

Por lo tanto, el argumento es inválido!

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Reglas de inferencia

Para la demostración de argumentos que involucran relaciones es suficiente:

- la regla de demostración condicional (incluye la regla de demostración indirecta),
- las ocho reglas de inferencia de la lógica proposicional,
- la regla de reemplazo de la lógica proposicional (10 reglas de equivalencias lógicas),
- las cuatro reglas de inferencia con cuantificadores,
- adicionar una restricción adicional a la regla de generalización universal y
- la regla de cambio de cuantificadores (cuatro reglas de equivalencias lógicas).

# Demostraciones de validez de argumentos

---

El siguiente ejemplo ilustra la necesidad de una nueva restricción a la regla de generalización universal (UG).

# Demostraciones de validez de argumentos

---

El siguiente ejemplo ilustra la necesidad de una nueva restricción a la regla de generalización universal (UG).

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 516)

Construir una demostración formal de validez para el argumento:

$$1 \quad (\forall y)(\exists x)Mxy \quad / \therefore (\exists x)(\forall y)Mxy$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

El siguiente ejemplo ilustra la necesidad de una nueva restricción a la regla de generalización universal (UG).

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 516)

Construir una demostración formal de validez para el argumento:

- |   |                             |   |              |                             |                    |
|---|-----------------------------|---|--------------|-----------------------------|--------------------|
| 1 | $(\forall y)(\exists x)Mxy$ | / | $\therefore$ | $(\exists x)(\forall y)Mxy$ |                    |
| 2 | $(\exists x)Mxy$            |   |              |                             | UI 1               |
| 3 | $May$                       |   |              |                             | EI 2               |
| 4 | $(\forall y)May$            |   |              |                             | UG 3 <b>Error!</b> |
| 5 | $(\exists x)(\forall y)Mxy$ |   |              |                             | EG 4               |

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Recomendaciones

- Cuando sea necesario instanciar cuantificadores universales y existenciales, instanciar primero los cuantificadores existenciales.

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Recomendaciones

- Cuando sea necesario instanciar cuantificadores universales y existenciales, instanciar primero los cuantificadores existenciales.
- «Globalmente es más simple (siempre que sea legítimo) instanciar con respecto a la misma variable que ha sido cuantificada y cuantificar con respecto a la misma variable que ocurriese libre en la premisa.» [Copi 2001, pág. 156]

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Recomendaciones

- Cuando sea necesario instanciar cuantificadores universales y existenciales, instanciar primero los cuantificadores existenciales.
- «Globalmente es más simple **(siempre que sea legítimo)** instanciar con respecto a la misma variable que ha sido cuantificada y cuantificar con respecto a la misma variable que ocurriese libre en la premisa.» [Copi 2001, pág. 156]

Es decir, en lugar de emplear

$$\frac{(\forall x)Fx}{\therefore Fy}$$

$$\frac{Fy}{\therefore (\exists x)Fx}$$

$$\frac{Fy}{\therefore (\forall x)Fx}$$

es mejor emplear, **cuando sea posible**, respectivamente

$$\frac{(\forall x)Fx}{\therefore Fx}$$

$$\frac{Fx}{\therefore (\exists x)Fx}$$

$$\frac{Fx}{\therefore (\forall x)Fx}$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.2, pág. 158)

Construir una demostración formal de validez para el argumento:

$$1 \quad (\forall x)[(\exists y)Byx \supset (\forall z)Bxz] \quad / \therefore (\forall y)(\forall z)(Byz \supset Bzy)$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.2, pág. 158)

Construir una demostración formal de validez para el argumento:

$$1 \quad (\forall x)[(\exists y)Byx \supset (\forall z)Bxz] \quad / \therefore (\forall y)(\forall z)(Byz \supset Bzy)$$

$$2 \quad (\exists y)Byx \supset (\forall z)Bxz \quad \text{UI 1}$$

$$3 \quad \begin{array}{|l} Byx \end{array} \quad \text{ACP}$$

$$4 \quad \begin{array}{|l} (\exists y)Byx \end{array} \quad \text{EG 3}$$

$$5 \quad \begin{array}{|l} (\forall z)Bxz \end{array} \quad \text{MP 2, 4}$$

$$6 \quad \begin{array}{|l} Bxy \end{array} \quad \text{UI 5}$$

$$7 \quad Byx \supset Bxy \quad \text{CP 3–6}$$

$$8 \quad (\forall z)(Byz \supset Bzy) \quad \text{UG 7}$$

$$9 \quad (\forall y)(\forall z)(Byz \supset Bzy) \quad \text{UG 8}$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.3, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

1  $(\forall x)(Cax \supset Dxb)$

2  $(\exists x)Dxb \supset (\exists y)Dby \quad / \therefore (\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Ejercicio (continuación)

1  $(\forall x)(Cax \supset Dxb)$

2  $(\exists x)Dxb \supset (\exists y)Dby \quad / \therefore (\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$

3  $(\exists x)Cax$  ACP

4  $Cac$  EI 3

5  $Cac \supset Dcb$  UI 1

6  $Dcb$  MP 5, 4

7  $(\exists x)Dxb$  EG 6

8  $(\exists y)Dby$  MP 2, 7

9  $(\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$  CP 3–9

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.4, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

$$1 \quad (\forall x)[Ex \supset (\forall y)(Fy \supset Gxy)]$$

$$2 \quad (\exists x)[Ex \wedge (\exists y)\sim Gxy] \quad / \therefore (\exists x)\sim Fx$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Ejercicio (continuación)

- |    |  |         |
|----|--|---------|
| 1  | $(\forall x)[Ex \supset (\forall y)(Fy \supset Gxy)]$                          |         |
| 2  | $(\exists x)[Ex \wedge (\exists y)\sim Gxy]$ / $\therefore (\exists x)\sim Fx$ |         |
| 3  | $Ea \wedge (\exists y)\sim Gay$  | EI 2    |
| 4  | $(\exists y)\sim Gay$  | Simp 3  |
| 5  | $\sim Gab$   | EI 4    |
| 6  | $Ea \supset (\forall y)(Fy \supset Gay)$                                       | UI 1    |
| 7  | $Ea$   | Simp 3  |
| 8  | $(\forall y)(Fy \supset Gay)$  | MP 6, 7 |
| 9  | $Fb \supset Gab$   | UI 8    |
| 10 | $\sim Fb$  | MT 9, 5 |
| 11 | $(\exists x)\sim Fx$   | EG 10   |

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.5\*, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

$$1 \quad (\exists x)[Hx \wedge (\forall y)(Iy \supset Jxy)]$$

$$\therefore (\forall x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \wedge Jyy)$$

# Demostraciones de validez de argumentos

## Ejercicio (continuación)

1	$(\exists x)[Hx \wedge (\forall y)(Iy \supset Jxy)]$	$/ \therefore (\forall x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \wedge Jyy)$
2	$(\forall x)(Hx \supset Ix)$	ACP
3	$\overline{Ha \wedge (\forall y)(Iy \supset Jay)}$	EI 1
4	$Ha$	Simp 3
5	$Ha \supset Ia$	UI 2
6	$Ia$	MP 5, 4
7	$(\forall y)(Iy \supset Jay)$	Simp 3
8	$Ia \supset Jaa$	UI 7
9	$Jaa$	MP 8, 6
10	$Ia \wedge Jaa$	Conj 6, 9
11	$(\exists y)(Iy \wedge Jyy)$	EG 10
12	$(\forall x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \wedge Jyy)$	CP 2–12

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.6, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

- 1  $(\forall x)\{Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]\}$
- 2  $(\forall x)[(\exists z)Lzx \supset Lxx]$
- 3  $\sim(\exists x)Lxx \quad / \therefore (\forall x)(Kx \supset (\forall y)\sim Lxy)$

# Demostraciones de validez de argumentos

## Ejercicio (continuación)

1	$(\forall x)\{Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]\}$	
2	$(\forall x)[(\exists z)Lzx \supset Lxx]$	
3	$\sim(\exists x)Lxx \quad / \therefore (\forall x)(Kx \supset (\forall y)\sim Lxy)$	
4	$Kx$	ACP
5	$(\forall x)\sim Lxx$	CQ 3
6	$\sim Lxx$	UI 5
7	$(\exists z)Lzx \supset Lxx$	UI 2
8	$\sim(\exists z)Lzx$	MT 7, 6
9	$Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]$	UI 1
10	$(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx$	MP 9, 4
11	$\sim(\exists y)Lxy$	MT 10, 8
12	$(\forall y)\sim Lxy$	CQ 11
13	$Kx \supset (\forall y)\sim Lxy$	CP 4–12
14	$(\forall x)(Kx \supset (\forall y)\sim Lxy)$	UG 13

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.7, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

$$1 \quad (\forall x)[Mx \supset (\forall y)(Ny \supset Oxy)]$$

$$2 \quad (\forall x)[Px \supset (\forall y)(Oxy \supset Qy)]$$

$$\therefore (\exists x)(Mx \wedge Px) \supset (\forall y)(Ny \supset Qy)$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Ejercicio (continuación)

$$1 \quad (\forall x)[Mx \supset (\forall y)(Ny \supset Oxy)]$$

$$2 \quad (\forall x)[Px \supset (\forall y)(Oxy \supset Qy)]$$

$$\therefore (\exists x)(Mx \wedge Px) \supset (\forall y)(Ny \supset Qy)$$

3	$(\exists x)(Mx \wedge Px)$	ACP
4	$Ma \wedge Pa$	EI 3
5	$Ma \supset (\forall y)(Ny \supset Oay)$	UI 1
6	$Ma$	Simp 4
7	$(\forall y)(Ny \supset Oay)$	MP 5, 6

(continua en la próxima diapositiva)

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Ejercicio (continuación)

8	$Ny \supset Oay$	UI 7
9	$Pa \supset (\forall y)(Oay \supset Qy)$	UI 2
10	$Pa$	Simp 4
11	$(\forall y)(Oay \supset Qy)$	MP 9, 10
12	$Oay \supset Qy$	UI 11
13	$Ny \supset Qy$	HS 8, 12
14	$(\forall y)(Ny \supset Qy)$	UG 13
15	$(\exists x)(Mx \wedge Px) \supset (\forall y)(Ny \supset Qy)$	CP 3–15

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.8, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

$$1 \quad (\forall x)[(Rx \wedge \sim Sx) \supset (\exists y)(Txy \wedge Uy)]$$

$$2 \quad (\exists x)[Vx \wedge Rx \wedge (\forall y)(Txy \supset Vy)]$$

$$3 \quad (\forall x)(Vx \supset \sim Sx) \quad / \therefore (\exists x)(Vx \wedge Ux)$$

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Ejercicio (continuación)

- |    |  |           |
|----|--|-----------|
| 1  | $(\forall x)[(Rx \wedge \sim Sx) \supset (\exists y)(Txy \wedge Uy)]$          |           |
| 2  | $(\exists x)[Vx \wedge Rx \wedge (\forall y)(Txy \supset Vy)]$                 |           |
| 3  | $(\forall x)(Vx \supset \sim Sx) \quad / \therefore (\exists x)(Vx \wedge Ux)$ |           |
| 4  | $Va \wedge Ra \wedge (\forall y)(Tay \supset Vy)$                              | EI 2      |
| 5  | $Va \supset \sim Sa$   | UI 3      |
| 6  | $Va$   | Simp 4    |
| 7  | $\sim Sa$  | MP 5, 6   |
| 8  | $Ra$   | Simp 4    |
| 9  | $Ra \wedge \sim Sa$  | Conj 8, 7 |
| 10 | $(Ra \wedge \sim Sa) \supset (\exists y)(Tay \wedge Uy)$                       | UI 1      |

(continúa en la próxima diapositiva)

# Demostraciones de validez de argumentos

---

## Ejercicio (continuación)

- |    |                               |             |
|----|-------------------------------|-------------|
| 11 | $(\exists y)(Tay \wedge Uy)$  | MP 10, 9    |
| 12 | $Tab \wedge Ub$               | EI 11       |
| 13 | $(\forall y)(Tay \supset Vy)$ | Simp 4      |
| 14 | $Tab \supset Vb$              | UI 13       |
| 15 | $Tab$                         | Simp 12     |
| 16 | $Vb$                          | MP 14, 15   |
| 17 | $Ub$                          | Simp 12     |
| 18 | $Vb \wedge Ub$                | Conj 16, 17 |
| 19 | $(\exists x)(Vx \wedge Ux)$   | EG 18       |

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.2, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

Todos los círculos son figuras. Por lo tanto, todos los que trazan círculos trazan figuras. ( $Cx$ :  $x$  es un círculo.  $Fx$ :  $x$  es una figura.  $Txy$ :  $x$  traza  $y$ .)

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.2, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

Todos los círculos son figuras. Por lo tanto, todos los que trazan círculos trazan figuras. ( $Cx$ :  $x$  es un círculo.  $Fx$ :  $x$  es una figura.  $Txy$ :  $x$  traza  $y$ .)

Representación:

$$1 \quad (\forall x)(Cx \supset Fx) \quad / \therefore (\forall x)(\forall y)[(Cx \wedge Tyx) \supset (Fx \wedge Tyx)]$$

# Demostraciones de validez de argumentos

## Ejercicio (continuación)

1	$(\forall x)(Cx \supset Fx)$	/ $\therefore (\forall x)(\forall y)[(Cx \wedge Tyx) \supset (Fx \wedge Tyx)]$
2	$Cx \wedge Tyx$	ACP
3	$Cx$	Simp 2
4	$Cx \supset Fx$	UI 1
5	$Fx$	MP 4, 3
6	$Tyx$	Simp 2
7	$Fx \wedge Tyx$	Conj 5, 6
8	$(Cx \wedge Tyx) \supset (Fx \wedge Tyx)$	CP 2–7
9	$(\forall y)[(Cx \wedge Tyx) \supset (Fx \wedge Tyx)]$	UG 8
10	$(\forall x)(\forall y)[(Cx \wedge Tyx) \supset (Fx \wedge Tyx)]$	UG 9

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.3, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

Cualquier amigo de Juan es un amigo de Pedro. Por lo tanto, cualquiera que conozca a un amigo de Juan conoce a un amigo de Pedro. ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Axy$ :  $x$  es un amigo de  $y$ .  $Cxy$ :  $x$  conoce a  $y$ .  $j$ : Juan.  $p$ : Pedro.)

# Demostraciones de validez de argumentos

---

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.3, pág. 159)

Construir una demostración formal de validez para el siguiente argumento:

Cualquier amigo de Juan es un amigo de Pedro. Por lo tanto, cualquiera que conozca a un amigo de Juan conoce a un amigo de Pedro. ( $Px$ :  $x$  es una persona.  $Axy$ :  $x$  es un amigo de  $y$ .  $Cxy$ :  $x$  conoce a  $y$ .  $j$ : Juan.  $p$ : Pedro.)

Representación:

$$1 \quad (\forall x)(Axj \supset Axp)$$

$$/ \therefore (\forall x)(\forall y)[(Px \wedge Cxy \wedge Ayj) \supset (Cxy \wedge Ayp)]$$

# Demostraciones de validez de argumentos

## Ejercicio (continuación)

$$1 \quad (\forall x)(A x j \supset A x p)$$

$$/ \therefore (\forall x)(\forall y)[(P x \wedge C x y \wedge A y j) \supset (C x y \wedge A y p)]$$

$$2 \quad \begin{array}{|l} P x \wedge C x y \wedge A y j \end{array}$$

ACP

$$3 \quad \begin{array}{|l} A y j \end{array}$$

Simp 2

$$4 \quad \begin{array}{|l} A y j \supset A y p \end{array}$$

UI 1

$$5 \quad \begin{array}{|l} A y p \end{array}$$

MP 4, 3

$$6 \quad \begin{array}{|l} C x y \end{array}$$

Simp 2

$$7 \quad \begin{array}{|l} C x y \wedge A y p \end{array}$$

Conj 6, 7

$$8 \quad (P x \wedge C x y \wedge A y j) \supset (C x y \wedge A y p)$$

CP 2-7

$$9 \quad (\forall y)[(P x \wedge C x y \wedge A y j) \supset (C x y \wedge A y p)]$$

UG 8

$$10 \quad (\forall x)(\forall y)[(P x \wedge C x y \wedge A y j) \supset (C x y \wedge A y p)]$$

UG 9

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

- $Rxy$  es una relación **simétrica** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(Rxy \supset Ryx)$ .
- $Rxy$  es un relación **asimétrica** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(Rxy \supset \sim Ryx)$ .
- $Rxy$  es un relación **no simétrica** si y solo si  $Rxy$  es una relación que no es ni simétrica ni asimétrica.

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

- $Rxy$  es una relación **simétrica** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(Rxy \supset Ryx)$ .
- $Rxy$  es un relación **asimétrica** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(Rxy \supset \sim Ryx)$ .
- $Rxy$  es un relación **no simétrica** si y solo si  $Rxy$  es una relación que no es ni simétrica ni asimétrica.

### Ejemplos

En los números naturales,  $=$  es una relación simétrica,  $<$  es una relación asimétrica y  $\leq$  es una relación no simétrica.

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

- $Rxy$  es una relación **transitiva** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Rxy \wedge Ryz) \supset Rxz]$ .
- $Rxy$  es una relación **intransitiva** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Rxy \wedge Ryz) \supset \sim Rxz]$ .
- $Rxy$  es una relación **no transitiva** si y solo si  $Rxy$  es una relación que no es ni transitiva ni intransitiva.

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

- $Rxy$  es una relación **transitiva** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Rxy \wedge Ryz) \supset Rxz]$ .
- $Rxy$  es una relación **intransitiva** si y solo si  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Rxy \wedge Ryz) \supset \sim Rxz]$ .
- $Rxy$  es una relación **no transitiva** si y solo si  $Rxy$  es una relación que no es ni transitiva ni intransitiva.

### Ejemplos

La relación  $\neq$  es transitiva en un conjunto unitario y es no transitiva en un conjunto de al menos tres elementos. El juego «piedra, papel o tijeras» establece una relación intransitiva  $Rxy$ :  $x$  le gana a  $y$ .

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

- $Rxy$  es una relación **(totalmente) reflexiva** si y solo si  $(\forall x)Rxx$ .
- $Rxy$  es una relación **irreflexiva** si y solo si  $(\forall x)\sim Rxx$ .
- $Rxy$  es una relación **no reflexiva** si y solo si  $Rxy$  es una relación que no es ni reflexiva ni irreflexiva.

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

- $Rxy$  es una relación **(totalmente) reflexiva** si y solo si  $(\forall x)Rxx$ .
- $Rxy$  es una relación **irreflexiva** si y solo si  $(\forall x)\sim Rxx$ .
- $Rxy$  es una relación **no reflexiva** si y solo si  $Rxy$  es una relación que no es ni reflexiva ni irreflexiva.

### Ejemplos

En los números enteros positivos, la relación  $|$  (divisibilidad) es una relación reflexiva, la relación  $<$  es una relación irreflexiva y la relación « $x \cdot y$  es un número par» es un relación no reflexiva.

# Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

## Ejemplo (Relaciones reflexivas y simétricas pero no transitivas)

- Sea  $A$  el conjunto  $A = \{a, b, c\}$  y  $R$  la relación en  $A$  definida por  $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$ .
- $|x - y| \leq 1$
- $Rxy$ :  $x$  vive a menos de un kilometro de distancia de  $y$

## Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 164)

Demuestre que si un relación binaria es asimétrica entonces la relación es irreflexiva.

# Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 164)

Demuestre que si un relación binaria es asimétrica entonces la relación es irreflexiva.

- |   |  |   |                                  |        |
|---|--|---|----------------------------------|--------|
| 1 | $(\forall x)(\forall y)(Rxy \supset \sim Ryx)$ | / | $\therefore (\forall x)\sim Rxx$ |        |
| 2 | $(\forall y)(Rxy \supset \sim Ryx)$            |   |                                  | UI 1   |
| 3 | $Rxx \supset \sim Rxx$                         |   |                                  | UI 2   |
| 4 | $\sim Rxx \vee \sim Rxx$                       |   |                                  | Impl 3 |
| 5 | $\sim Rxx$                                     |   |                                  | Taut 4 |
| 6 | $(\forall x)\sim Rxx$                          |   |                                  | UG 5   |

# Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

## Ejercicio

En el ejemplo de la pág. 102 demostramos que si un relación binaria es asimétrica entonces la relación es irreflexiva. Si se intercambian la premisa y la conclusión es el nuevo argumento válido? Es decir, si una relación binaria es irreflexiva entonces la relación es asimétrica?

# Algunos atributos de las relaciones diádicas

---

## Ejercicio

En el ejemplo de la pág. 102 demostramos que si un relación binaria es asimétrica entonces la relación es irreflexiva. Si se intercambian la premisa y la conclusión es el nuevo argumento válido? Es decir, si una relación binaria es irreflexiva entonces la relación es asimétrica?

**Respuesta:** El argumento es inválido. Por ejemplo, en los números naturales la relación  $x < y$  o  $x > y$  es una relación irreflexiva, pero no es una relación asimétrica.

# Atributos de las relaciones y argumentos relacionales

---

## Ejemplo

Al es mayor que Bill. Bill es mayor que Charlie. Por lo tanto, Al es mayor que Charlie ( $a$ : Al.  $b$ : Bill.  $c$ : Charlie.  $Mxy$ :  $x$  es mayor que  $y$ .)

# Atributos de las relaciones y argumentos relacionales

---

## Ejemplo

Al es mayor que Bill. Bill es mayor que Charlie. Por lo tanto, Al es mayor que Charlie ( $a$ : Al.  $b$ : Bill.  $c$ : Charlie.  $Mxy$ :  $x$  es mayor que  $y$ .)

Argumento **inválido**

$Mab$

$Mbc$

$\therefore Mac$

# Atributos de las relaciones y argumentos relacionales

---

## Ejemplo

Al es mayor que Bill. Bill es mayor que Charlie. Por lo tanto, Al es mayor que Charlie ( $a$ : Al.  $b$ : Bill.  $c$ : Charlie.  $Mxy$ :  $x$  es mayor que  $y$ .)

Argumento **inválido**

$Mab$

$Mbc$

$\therefore Mac$

Argumento **válido**

$Mab$

$Mbc$

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Mxy \wedge Myz) \supset Mxz]$  (premisa implícita)

$\therefore Mac$

# Entimemas

---

## Definición (Entimema)

«Un argumento que está expresado de manera incompleta, siendo “sobrentendida” una parte del mismo.» [Copi 2001, pág. 164]

# Referencias

---

-  Copi, Irving M. [1954] (2001). *Lógica Simbólica*. Trad. por Sestier Boulier, Andrés. 2.<sup>a</sup> ed., 20.<sup>a</sup> reimpresión. Compañía Editorial Continental (vid. págs. 39-42, 45-51, 53-55, 57-62, 70-75, 77, 79, 81, 83, 86, 89, 90, 92, 93, 102, 103, 109).
-  Deaño, Alfredo [1974] (1994). *Introducción a la Lógica Formal*. 11.<sup>a</sup> reimpresión. Alianza Universidad Textos. Alianza Universidad (vid. págs. 3, 7-10).
-  Hurley, Patrick J. y Watson, Lori [1972] (2016). *A Concise Introduction to Logic*. 13.<sup>a</sup> ed. Cengage Learning (vid. págs. 67-69).