CM0260 Lógica
Lógica de predicados monádicos

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2015-2

(Última actualización: 29 de junio de 2024)

Introducción

$\boxed{\text{lógica proposicional}}$

Introducción

lógica de predicados monádicos

lógica proposicional

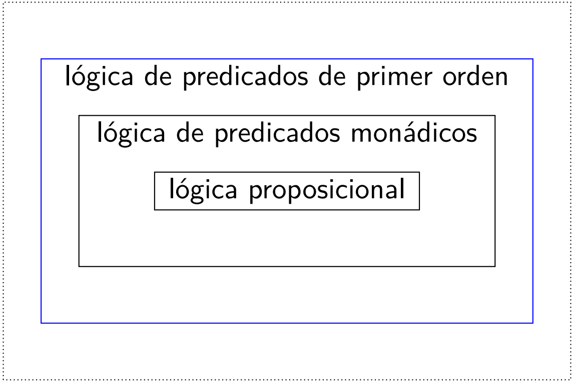
Introducción

lógica de predicados de primer orden

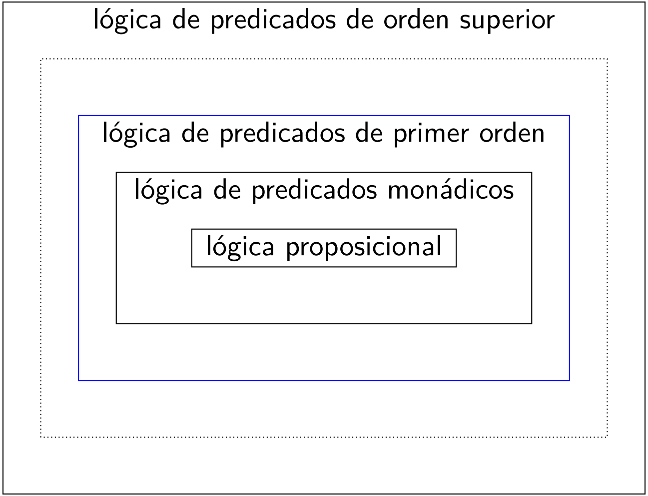
lógica de predicados monádicos

lógica proposicional

Introducción



Introducción



Motivación

Ejemplo

Todos los hombres son mortales. Socrátes es humano. Luego, Socrátes es mortal.

Motivación

Ejemplo

Todos los hombres son mortales. Socrátes es humano. Luego, Socrátes es mortal.

P: Todos los hombres son mortales
H: Socrátes es humano
M: Socrátes es mortal

Motivación

Ejemplo

Todos los hombres son mortales. Socrátes es humano. Luego, Socrátes es mortal.

P: Todos los hombres son mortales
H: Socrátes es humano
M: Socrátes es mortal

El argumento

$$\begin{array}{ll} 1 & P \\ 2 & H \quad / \therefore \; M \end{array}$$

es inválido.

Motivación

Ejemplo

Todos los hombres son mortales. Socrátes es humano. Luego, Socrátes es mortal.

P: Todos los hombres son mortales
H: Socrátes es humano
M: Socrátes es mortal

El argumento

$$
\begin{array}{ll}
1 & P \\
2 & H \quad / \therefore \; M
\end{array}
$$

es inválido.

La validez del argumento depende de la estructura interna de los enunciados simples.

Proposiciones singulares

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, \ldots, t$
- Atributos (predicados): Letras mayúsculas
- Variables de individuo: u, v, w, x, y y z

Proposiciones singulares

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, \ldots, t$
- Atributos (predicados): Letras mayúsculas
- Variables de individuo: u, v, w, x, y y z

Proposición singular

Sujeto $+$ atributo/predicado

Proposiciones singulares

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, \ldots, t$
- Atributos (predicados): Letras mayúsculas
- Variables de individuo: u, v, w, x, y y z

Proposición singular

Sujeto $+$ atributo/predicado

Ejemplos

Socrátes es mortal
s: Sócrates
Mx: x es mortal
Ms: Sócrates es mortal

Proposiciones singulares

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, \ldots, t$
- Atributos (predicados): Letras mayúsculas
- Variables de individuo: u, v, w, x, y y z

Proposición singular

Sujeto $+$ atributo/predicado

Ejemplos

Socrátes es mortal
s: Sócrates
Mx: x es mortal
Ms: Sócrates es mortal

Hx: x es humano
Ha, Hb, Hc, ...

Funciones proposicionales

Función proposicional

Expresiones que contienen variables de individuo. No son ni verdaderas ni falsas.

Funciones proposicionales

Función proposicional

Expresiones que contienen variables de individuo. No son ni verdaderas ni falsas.

Lógica de predicados monádicos

Los predicados solo tienen una variable.

Funciones proposicionales: Instanciación

Instanciación

El proceso de obtener una proposición singular a partir de una función proposicional sustituyendo las variables por constantes.

Funciones proposicionales: Instanciación

Instanciación

El proceso de obtener una proposición singular a partir de una función proposicional sustituyendo las variables por constantes.

Ejemplo

Hx: x es humano
Hs es una instancia de sustitución de Hx

Funciones proposicionales: Generalización

Proposición general

Una proposición general no contiene nombre de individuos. Se obtiene a partir de una función proposicional por generalización (cuantificación).

Funciones proposicionales: Generalización

Proposición general

Una proposición general no contiene nombre de individuos. Se obtiene a partir de una función proposicional por generalización (cuantificación).

Cuantificadores

$(\forall x)$: Cuantificador universal
$(\exists x)$: Cuantificador existencial

Funciones proposicionales: Generalización

Proposición general

Una proposición general no contiene nombre de individuos. Se obtiene a partir de una función proposicional por generalización (cuantificación).

Cuantificadores

$(\forall x)$: Cuantificador universal
$(\exists x)$: Cuantificador existencial

Notación: Copi [2001], Hurley y Watson [2016] y LogicCoach 11 usan la notación '(x)' en lugar de la notación '$(\forall x)$'.

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,
dado cualquier x, Mx,

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,
dado cualquier x, Mx,
$(\forall x)Mx$.

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,
dado cualquier x, Mx,
$(\forall x)Mx$.

Ejemplo

Algo es mortal,

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,
dado cualquier x, Mx,
$(\forall x)Mx$.

Ejemplo

Algo es mortal,
existe cuando menos un x tal que x es mortal,

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,
dado cualquier x, Mx,
$(\forall x)Mx$.

Ejemplo

Algo es mortal,
existe cuando menos un x tal que x es mortal,
existe cuando menos un x tal que Mx,

Funciones proposicionales: Generalización

Ejemplo

Todo es mortal,
dado cualquier x, x es mortal,
dado cualquier x, Mx,
$(\forall x)Mx$.

Ejemplo

Algo es mortal,
existe cuando menos un x tal que x es mortal,
existe cuando menos un x tal que Mx,
$(\exists x)Mx$.

Verdad de las proposiciones generales

- La cuantificación universal de una función proposicional es verdadera cuando todas sus instancias de sustitución son verdades.

Verdad de las proposiciones generales

- La cuantificación universal de una función proposicional es verdadera cuando todas sus instancias de sustitución son verdades.
- La cuantificación existencial de una función proposicional es verdadera cuando al menos una instancia de sustitución es verdadera.

Negación de las proposiciones generales

Ejemplos

Proposición general	Negación
Todo es mortal: $(\forall x)Mx$	

Negación de las proposiciones generales

Ejemplos

Proposición general	Negación
Todo es mortal: $(\forall x)Mx$	Algo no es mortal: $(\exists x){\sim}Mx$

Negación de las proposiciones generales

Ejemplos

Proposición general	Negación
Todo es mortal: $(\forall x)Mx$	Algo no es mortal: $(\exists x)\sim Mx$
Algo es mortal: $(\exists x)Mx$	

Negación de las proposiciones generales

Ejemplos

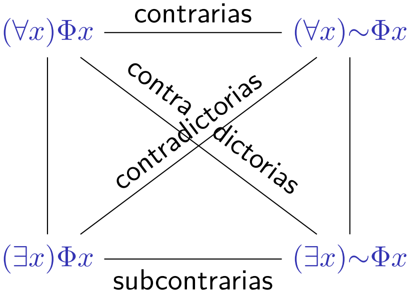
Proposición general	Negación
Todo es mortal: $(\forall x)Mx$	Algo no es mortal: $(\exists x){\sim}Mx$
Algo es mortal: $(\exists x)Mx$	Nada es mortal: $(\forall x){\sim}Mx$

Relaciones generales entre las cuantificaciones universal y existencial

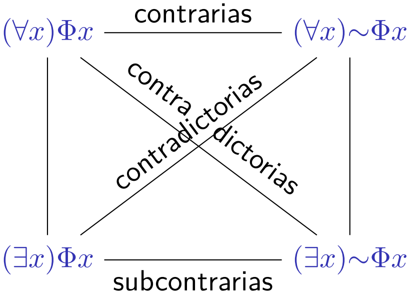
Convenciones

- Existe al menos un individuo.
- Φ: Representa cualquier símbolo de atributo/predicado (variable predicativa).

Relaciones generales entre las cuantificaciones universal y existencial



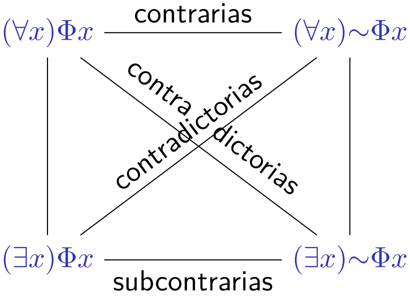
Relaciones generales entre las cuantificaciones universal y existencial



Relaciones

- Proposiciones contrarias: Ambas pueden ser falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas.

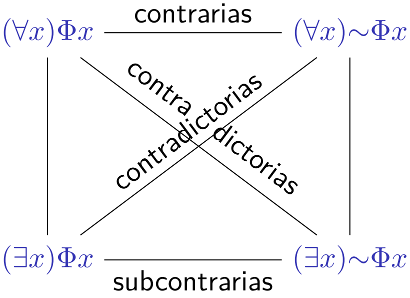
Relaciones generales entre las cuantificaciones universal y existencial



Relaciones

- Proposiciones contrarias: Ambas pueden ser falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas.
- Proposiciones subcontrarias: Ambas pueden ser verdaderas, pero no pueden ambas ser falsas.

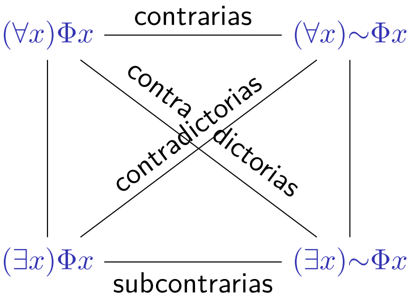
Relaciones generales entre las cuantificaciones universal y existencial



Relaciones

- Proposiciones contrarias: Ambas pueden ser falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas.
- Proposiciones subcontrarias: Ambas pueden ser verdaderas, pero no pueden ambas ser falsas.
- Proposiciones contradictorias: Una debe ser verdadera y la otra falsa.

Relaciones generales entre las cuantificaciones universal y existencial



Relaciones

- Proposiciones contrarias: Ambas pueden ser falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas.
- Proposiciones subcontrarias: Ambas pueden ser verdaderas, pero no pueden ambas ser falsas.
- Proposiciones contradictorias: Una debe ser verdadera y la otra falsa.
- En cada lado, la verdad de la proposición más baja es implicada por la verdad de la proposición de arriba.

Alcance de un cuantificador

Ejemplo

(1) es diferente a (2):

$$(\forall x)(Hx \supset Mx) \tag{1}$$

$$(\forall x)Hx \supset Mx \tag{2}$$

Alcance de un cuantificador

Ejemplo

(1) es diferente a (2):

$$(\forall x)(Hx \supset Mx) \tag{1}$$

$$(\forall x)Hx \supset Mx \tag{2}$$

- La función proposicional asociada a (1) es $Hx \supset Mx$
  Instancias de substitución: $Ha \supset Ma$, $Hb \supset Mb$, ...

Alcance de un cuantificador

Ejemplo

(1) es diferente a (2):

$$(\forall x)(Hx \supset Mx) \tag{1}$$

$$(\forall x)Hx \supset Mx \tag{2}$$

- La función proposicional asociada a (1) es $Hx \supset Mx$
  Instancias de substitución: $Ha \supset Ma$, $Hb \supset Mb$, ...
- (2) es una función proposicional
  Instancias de substitución: $(\forall x)Hx \supset Ma$, $(\forall x)Hx \supset Mb$, ...

Alcance de un cuantificador

Ejemplo

(1) es diferente a (2):

$$(\forall x)(Hx \supset Mx) \tag{1}$$

$$(\forall x)Hx \supset Mx \tag{2}$$

- La función proposicional asociada a (1) es $Hx \supset Mx$
  Instancias de substitución: $Ha \supset Ma$, $Hb \supset Mb$, ...
- (2) es una función proposicional
  Instancias de substitución: $(\forall x)Hx \supset Ma$, $(\forall x)Hx \supset Mb$, ...

Convención

Un cuantificador tiene como alcance, la más pequeña de las componentes que la puntuación permita.

Proposiciones generales «tradicionales»

- Afirmativa universal (**A**)
- Negativa universal (**E**)
- Afirmativa particular (**I**)
- Negativa particular (**O**)

Proposiciones generales «tradicionales»

- Afirmativa universal (**A**)
- Negativa universal (**E**)
- Afirmativa particular (**I**)
- Negativa particular (**O**)

Ejemplos

(**A**)	Todos los humanos son mortales	$(\forall x)(Hx \supset Mx)$
(**E**)	Ningún humano es mortal	$(\forall x)(Hx \supset {\sim}Mx)$
(**I**)	Algunos humanos son mortales	$(\exists x)(Hx \wedge Mx)$
(**O**)	Algunos humanos no son mortales	$(\exists x)(Hx \wedge {\sim}Mx)$

Proposiciones generales «tradicionales»

- Afirmativa universal (**A**)
- Negativa universal (**E**)
- Afirmativa particular (**I**)
- Negativa particular (**O**)

Ejemplos

(**A**)	Todos los humanos son mortales	$(\forall x)(Hx \supset Mx)$
(**E**)	Ningún humano es mortal	$(\forall x)(Hx \supset \sim Mx)$
(**I**)	Algunos humanos son mortales	$(\exists x)(Hx \wedge Mx)$
(**O**)	Algunos humanos no son mortales	$(\exists x)(Hx \wedge \sim Mx)$

Observación: Mirar la figura en Copi [2001, pág. 92].

Representación de enunciados

Ejemplo

Representar las siguientes oraciones en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Representación de enunciados

Ejemplo

Representar las siguientes oraciones en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los miembros son padres o ingenieros.

Mx: x es miembro
Px: x es padre
Ix: x es ingeniero

$(\forall x)[\,Mx \supset (Px \vee Ix)\,]$

Representación de enunciados

Ejemplo

Representar las siguientes oraciones en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Algunos senadores son o desleales o mal aconsejados.

Sx: x es senador
Dx: x es desleal
Mx: x es mal aconsejado

$(\exists x)[\,Sx \wedge (Dx \vee Mx)\,]$

Representación de enunciados

Ejemplo

Representar las siguientes oraciones en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Las manzanas y los plátanos son nutritivos.

Mx: x es una manzana
Px: x es un plátano
Nx: x es nutritivo

- $[(\forall x)(Mx \supset Nx)] \wedge [(\forall x)(Px \supset Nx)]$ (proposición general compuesta)
- $(\forall x)[(Mx \vee Px) \supset Nx]$ (proposición general simple)
- $(\forall x)[(Mx \wedge Px) \supset Nx]$ (incorrecta!)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.4, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Los ejecutivos todos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.4, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Los ejecutivos todos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)

Representación: $(\forall x)(Ex \supset Sx)$

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.5*, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Solo los ejecutivos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.5*, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Solo los ejecutivos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)

Representación: $(\forall x)(Sx \supset Ex)$

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.12, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Ningún visitante se quedó a cenar. (Vx: x es un visitante. Cx: x se quedó a cenar.)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.12, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Ningún visitante se quedó a cenar. (Vx: x es un visitante. Cx: x se quedó a cenar.)

Representación: $\sim(\exists x)(Vx \wedge Cx)$ o $(\forall x)(Vx \supset \sim Cx)$

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.13, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Nada en la casa escapó a la destrucción. (Cx: x estaba en la casa. Ex: x escapó a la destrucción.)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.13, pág. 94)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Nada en la casa escapó a la destrucción. (Cx: x estaba en la casa. Ex: x escapó a la destrucción.)

Representación: $(\forall x)(Cx \supset {\sim}Ex)$

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.16, pág. 95)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Algunos medicamentos son peligrosos solo si se toman en cantidades excesivas. (Mx: x es un medicamento. Px: x es peligroso. Ex: x se toma en cantidades excesivas.)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.16, pág. 95)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Algunos medicamentos son peligrosos solo si se toman en cantidades excesivas. (Mx: x es un medicamento. Px: x es peligroso. Ex: x se toma en cantidades excesivas.)

Representación: $(\exists x)[\, Mx \wedge (Px \supset Ex)\,]$

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.17, pág. 95)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Todas las frutas y las verduras son sanas y nutritivas. (Fx: x es una fruta. Vx: x es una verdura. Sx: x es sana. Nx: x es nutritiva.)

Representación de enunciados

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.17, pág. 95)

Traducir la siguiente oración a la notación lógica de las funciones proposicionales y cuantificadores, usando las abreviaciones que se sugieren.

Todas las frutas y las verduras son sanas y nutritivas. (Fx: x es una fruta. Vx: x es una verdura. Sx: x es sana. Nx: x es nutritiva.)

Representación: $(\forall x)[\,(Fx \vee Vx) \supset (Sx \wedge Nx)\,]$

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.6, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los novelistas son observadores. Algunos poetas no son observadores. Por lo tanto, ningún novelista es poeta.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.6, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los novelistas son observadores. Algunos poetas no son observadores. Por lo tanto, ningún novelista es poeta.

Nx: x es un novelista
Ox: x es observador
Px: x es un poeta

Representación:

1 $(\forall x)[Nx \supset Ox]$

2 $(\exists x)(Px \wedge {\sim}Ox) \quad / \therefore\ {\sim}(\exists x)(Nx \wedge Px)$

Una forma alternativa de representar la conclusión es $(\forall x)(Nx \supset {\sim}Px)$.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.8, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los estadistas son inteligentes. Algunos políticos son inteligentes. No todos los políticos son inteligentes. Luego, todos los estadistas son políticos.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.8, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los estadistas son inteligentes. Algunos políticos son inteligentes. No todos los políticos son inteligentes. Luego, todos los estadistas son políticos.

Ex: x es un estadista
Ix: x es inteligente
Px: x es un político

Representación:

1 $(\forall x)[Ex \supset Ix]$

2 $(\exists x)(Px \wedge Ix)$

3 $\sim(Vx)(Px \supset Ix) \quad / \therefore\ (\forall x)(Ex \supset Px)$

Una forma alternativa de representar la tercera premisa es $(\exists x)(Px \wedge \sim Ix)$.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.9, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los estadistas son políticos. Algunos estadistas son inteligentes. Algunos políticos no son estadistas. Luego, algunos políticos no son inteligentes.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.9, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Todos los estadistas son políticos. Algunos estadistas son inteligentes. Algunos políticos no son estadistas. Luego, algunos políticos no son inteligentes.

Ex: x es un estadista
Ix: x es inteligente
Px: x es un político

Representación:

1 $(\forall x)(Ex \supset Px)$

2 $(\exists x)(Ex \land Ix)$

3 $(\exists x)(Px \land \sim Ex) \quad / \therefore \; (\exists x)(Px \land \sim Ix)$

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.10, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Los caballos y las vacas son mamíferos. Algunos animales son mamíferos. Algunos animales no son mamíferos. Luego todos los caballos son animales.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.10, pág. 107)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Los caballos y las vacas son mamíferos. Algunos animales son mamíferos. Algunos animales no son mamíferos. Luego todos los caballos son animales.

Cx: x es un caballo
Vx: x es una vaca
Mx: x es una mamífero
Ax: x es un animal

Representación:

1 $(\forall x)[\,(Cx \vee Vx) \supset Mx\,]$

2 $(\exists x)(Ax \wedge Mx)$

3 $(\exists x)(Ax \wedge {\sim}Mx) \quad / \therefore\ (\forall x)(Cx \supset Ax)$

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.6, pág. 108)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Solo los ciudadanos votan. No todos los residentes son ciudadanos. Luego algunos que votan no son residentes.

Representación de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.6, pág. 108)

Representar el siguiente argumento en la lógica de predicados monádicos. Escribir explícitamente las abreviaciones empleadas.

Solo los ciudadanos votan. No todos los residentes son ciudadanos. Luego algunos que votan no son residentes.

Cx: x es un ciudadano
Vx: x vota
Rx: x es residente

Representación:

1 $(\forall x)[Vx \supset Cx]$

2 $\sim(\forall x)(Rx \supset Cx) \quad / \therefore\ (\exists x)(Vx \wedge \sim Rx)$

Una forma alternativa de representar la segunda premisa es $(\exists x)(Cx \wedge \sim Rx)$.

Proposiciones generales y número de individuos

Observación

Supuesto de la lógica de predicados: existe al menos un individuo.

Proposiciones generales y número de individuos

Observación

Supuesto de la lógica de predicados: existe al menos un individuo.

Notación: $p \overset{c}{::} q$ significa que p es condicionalmente lógicamente equivalente a q.

Proposiciones generales y número de individuos

- Si hay exactamente un individuo a:

$$(\forall x)\Phi x \overset{c}{::} \Phi a,$$
$$(\exists x)\Phi x \overset{c}{::} \Phi a.$$

- Si hay exactamente dos individuos a y b:

$$(\forall x)\Phi x \overset{c}{::} (\Phi a \wedge \Phi b),$$
$$(\exists x)\Phi x \overset{c}{::} (\Phi a \vee \Phi b).$$

- Si hay exactamente k individuos $a, b, \dots, k$:

$$(\forall x)\Phi x \overset{c}{::} (\Phi a \wedge \Phi b \wedge \cdots \wedge \Phi k),$$
$$(\exists x)\Phi x \overset{c}{::} (\Phi a \vee \Phi b \vee \cdots \vee \Phi k).$$

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Validez de argumentos

«Un argumento que involucra cuantificadores es válido si y sólo si es válido no importando cuántos individuos hay, siempre que haya cuando menos uno.» [Copi 2001, pág. 103]

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a:

$$(Ba \supset Pa)$$

$$(Ea \supset Pa) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea)$$

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a:

$$(Ba \supset Pa)$$

$$(Ea \supset Pa) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea)$$

Ba	Ea	Pa	$Ba \supset Pa$	$Ea \supset Pa$	$Ba \supset Ea$	Validez

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a:

$$(Ba \supset Pa)$$

$$(Ea \supset Pa) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea)$$

Ba	Ea	Pa	$Ba \supset Pa$	$Ea \supset Pa$	$Ba \supset Ea$	Validez
			$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a:

$$(Ba \supset Pa)$$

$$(Ea \supset Pa) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea)$$

Ba	Ea	Pa	$Ba \supset Pa$	$Ea \supset Pa$	$Ba \supset Ea$	Validez
$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$		$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \; (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a:

$$(Ba \supset Pa)$$

$$(Ea \supset Pa) \quad / \therefore \; (Ba \supset Ea)$$

Ba	Ea	Pa	$Ba \supset Pa$	$Ea \supset Pa$	$Ba \supset Ea$	Validez
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 104)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Todos los elefantes son pesados. Luego, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\forall x)(Ex \supset Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a:

$$(Ba \supset Pa)$$

$$(Ea \supset Pa) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea)$$

Ba	Ea	Pa	$Ba \supset Pa$	$Ea \supset Pa$	$Ba \supset Ea$	Validez
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	$\times$

El argumento es inválido!

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 105)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Algunos elefantes son pesados. Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\exists x)(Ex \wedge Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 105)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Algunos elefantes son pesados. Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\exists x)(Ex \land Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para un individuo a el argumento es válido.

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 105)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Algunos elefantes son pesados. Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\exists x)(Ex \wedge Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para dos individuos a y b:

$$(Ba \supset Pa) \wedge (Bb \supset Pb)$$

$$(Ea \wedge Pa) \vee (Eb \wedge Pb) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea) \wedge (Bb \supset Eb)$$

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 105)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Algunos elefantes son pesados. Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

$(\forall x)(Bx \supset Px)$

$(\exists x)(Ex \wedge Px) \quad / \therefore\ (\forall x)(Bx \supset Ex)$

- Para dos individuos a y b:

$(Ba \supset Pa) \wedge (Bb \supset Pb)$

$(Ea \wedge Pa) \vee (Eb \wedge Pb) \quad / \therefore\ (Ba \supset Ea) \wedge (Bb \supset Eb)$

El argumento es inválido para la asignación:

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 105)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

Todas las ballenas son pesadas. Algunos elefantes son pesados. Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

$$(\forall x)(Bx \supset Px)$$

$$(\exists x)(Ex \wedge Px) \quad / \therefore \ (\forall x)(Bx \supset Ex)$$

- Para dos individuos a y b:

$$(Ba \supset Pa) \wedge (Bb \supset Pb)$$

$$(Ea \wedge Pa) \vee (Eb \wedge Pb) \quad / \therefore \ (Ba \supset Ea) \wedge (Bb \supset Eb)$$

El argumento es inválido para la asignación:

Ba	Bb	Ea	Eb	Pa	Pb
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.4, pág. 107)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

$$(\forall x)(Hx \supset {\sim}Ix)$$

$$(\exists x)(Jx \wedge {\sim}Ix) \quad / \therefore \ (\forall x)(Hx \supset Jx)$$

Invalidez de argumentos empleado universos finitos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio I.4, pág. 107)

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

$$(\forall x)(Hx \supset {\sim}Ix)$$

$$(\exists x)(Jx \wedge {\sim}Ix) \quad / \therefore \ (\forall x)(Hx \supset Jx)$$

El argumento es inválido con dos individuos a y b y la asignación:

Ha	Ia	Ja	Hb	Ib	Jb
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**

Invalidez de argumentos empleando universos finitos

Ejemplo

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

$$(\forall x)Hx \supset (\forall x)Mx \quad / \therefore \ (\forall x)(Hx \supset Mx)$$

Invalidez de argumentos empleando universos finitos

Ejemplo

Demuestre que el siguiente argumento es inválido:

$$(\forall x)Hx \supset (\forall x)Mx \quad / \therefore \ (\forall x)(Hx \supset Mx)$$

El argumento es inválido con dos individuos a y b:

Ha	Hb	Ma	Mb
T	**F**	**F**	**F**

$(Ha \wedge Hb) \supset (Ma \wedge Mb)$	$(Ha \supset Ma) \wedge (Hb \supset Mb)$	Validez
T	**F**	$\times$

Decidibilidad de la lógica de predicados monádicos

Teorema

«Si un argumento contiene n símbolos de predicados diferentes, entonces, si es válido para un modelo que contenga 2^n individuos, entonces es válido en cualquier modelo, o universalmente válido.» [Copi 2001, pág. 106]

[1] Ackermann [1954, pág. 35] menciona que la prueba original es de Löwenheim [1967].

Decidibilidad de la lógica de predicados monádicos

Teorema

«Si un argumento contiene n símbolos de predicados diferentes, entonces, si es válido para un modelo que contenga 2^n individuos, entonces es válido en cualquier modelo, o universalmente válido.» [Copi 2001, pág. 106]

Observación

El teorema anterior solo es válido para símbolos de predicados monádicos.[1]

[1] Ackermann [1954, pág. 35] menciona que la prueba original es de Löwenheim [1967].

Variables libres y ligadas

Definición

Una variable es **libre** sii no se encuentra dentro del alcance de un cuantificador.

Definición

Una variable es **ligada** sii se encuentra dentro del alcance de un cuantificador.

Ejemplos

$(\forall x)(Px \supset Cx) \supset Cx$: La primera, segunda y tercera ocurrencia de x están ligadas. La cuarta ocurrencia de x está libre.[1]

[1] Para [Copi 2001], la primera ocurrencia de la variable x ocurre en $(\forall x)$.

Variables libres y ligadas

Definición

Una variable es **libre** sii no se encuentra dentro del alcance de un cuantificador.

Definición

Una variable es **ligada** sii se encuentra dentro del alcance de un cuantificador.

Ejemplos

$(\forall x)(Px \supset Cx) \supset Cx$: La primera, segunda y tercera ocurrencia de x están ligadas. La cuarta ocurrencia de x está libre.[1]

$(\forall x)(Px \supset Cx) \supset (\exists x)(Ax \wedge Cx)$: La primera, segunda y tercera ocurrencia de x están ligadas al cuantificador universal. La cuarta, quinta y sexta ocurrencia de x están ligadas al cuantificador existencial.

[1] Para [Copi 2001], la primera ocurrencia de la variable x ocurre en $(\forall x)$.

Funciones proposicionales

Función proposicional

Expresiones que contienen al menos una variable libre.

Proposiciones

Expresiones cuya toda ocurrencia de una variable debe ser ligada.

Funciones proposicionales

Función proposicional

Expresiones que contienen al menos una variable libre.

Proposiciones

Expresiones cuya toda ocurrencia de una variable debe ser ligada.

Ejemplos

Las funciones proposicionales pueden contener:

- Proposiciones singulares: $Fa \wedge Ga$

Funciones proposicionales

Función proposicional

Expresiones que contienen al menos una variable libre.

Proposiciones

Expresiones cuya toda ocurrencia de una variable debe ser ligada.

Ejemplos

Las funciones proposicionales pueden contener:

- Proposiciones singulares: $Fa \wedge Ga$
- Proposiciones generales: $(\forall x)(Px \supset Cx) \supset Cx$

Funciones proposicionales

Función proposicional

Expresiones que contienen al menos una variable libre.

Proposiciones

Expresiones cuya toda ocurrencia de una variable debe ser ligada.

Ejemplos

Las funciones proposicionales pueden contener:

- Proposiciones singulares: $Fa \wedge Ga$
- Proposiciones generales: $(\forall x)(Px \supset Cx) \supset Cx$
- Varias variables libres: $Fu \wedge Gv$

Instanciación de funciones proposicionales

Regla

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional, la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable.

Instanciación de funciones proposicionales

Regla

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional, la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable.

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \vee (Gy \wedge Hx)$

Instanciación de funciones proposicionales

Regla

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional, la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable.

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \vee (Gy \wedge Hx)$
Instancia correcta: $Fa \vee (Gb \wedge Ha)$

Instanciación de funciones proposicionales

Regla

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional, la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable.

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \vee (Gy \wedge Hx)$
Instancia correcta: $Fa \vee (Gb \wedge Ha)$
Instancia incorrecta: $Fa \vee (Gb \wedge Hc)$

Instanciación de funciones proposicionales

Regla

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional, la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable.

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \vee (Gy \wedge Hx)$
Instancia correcta: $Fa \vee (Gb \wedge Ha)$
Instancia incorrecta: $Fa \vee (Gb \wedge Hc)$
Instancia correcta: $Fc \vee (Gc \wedge Hc)$

Generalización de funciones proposicionales

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \supset Gx$

$(\forall x)(Fx \supset Gx)$, $(\forall y)(Fy \supset Gy)$, $(\forall z)(Fz \supset Gz)$, $\ldots$

Generalización de funciones proposicionales

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \supset Gx$

$(\forall x)(Fx \supset Gx)$, $(\forall y)(Fy \supset Gy)$, $(\forall z)(Fz \supset Gz)$, ...

$(\exists x)(Fx \supset Gx)$, $(\exists y)(Fy \supset Gy)$, $(\exists z)(Fz \supset Gz)$, ...

Generalización de funciones proposicionales

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \supset Gx$

$(\forall x)(Fx \supset Gx)$, $(\forall y)(Fy \supset Gy)$, $(\forall z)(Fz \supset Gz)$, ...

$(\exists x)(Fx \supset Gx)$, $(\exists y)(Fy \supset Gy)$, $(\exists z)(Fz \supset Gz)$, ...

Ejemplo

Función proposicional: $Fx \wedge Gy$

y $(\forall y)(Fx \wedge Gy)$

Prueba formal de validez

Argumento	Prueba formal de validez
P_1	1 P_1
$\vdots$	$\vdots$
P_n	n P_n $\quad / \therefore\ C$
$\therefore\ C$	n+1 S_1
	$\vdots$
	n+m S_m

Prueba formal de validez

Argumento	Prueba formal de validez
P_1	1 P_1
$\vdots$	$\vdots$
P_n	n P_n $/ \therefore C$
$\therefore C$	n+1 S_1
	$\vdots$
	n+m S_m

- $P_1, \ldots, P_n$ y C son proposiciones,

Prueba formal de validez

Argumento	Prueba formal de validez
P_1	1 P_1
$\vdots$	$\vdots$
P_n	n P_n $/\therefore\ C$
$\therefore\ C$	n+1 S_1
	$\vdots$
	n+m S_m

- $P_1, \ldots, P_n$ y C son proposiciones,
- cada $S_{i \neq m}$ puede ser una proposición o una función proposicional,

Prueba formal de validez

Argumento	Prueba formal de validez
P_1	1 P_1
$\vdots$	$\vdots$
P_n	n P_n $/ \therefore\ C$
$\therefore\ C$	n+1 S_1
	$\vdots$
	n+m S_m

- $P_1, \ldots, P_n$ y C son proposiciones,
- cada $S_{i \neq m}$ puede ser una proposición o una función proposicional,
- cada S_i es un supuesto de alcance limitado o se sigue de las proposiciones o funciones proposicionales anteriores por una regla de inferencia o por una equivalencia lógica y

Prueba formal de validez

Argumento	Prueba formal de validez
P_1	1 P_1
$\vdots$	$\vdots$
P_n	n P_n $/ \therefore\ C$
$\therefore\ C$	n+1 S_1
	$\vdots$
	n+m S_m

- $P_1, \ldots, P_n$ y C son proposiciones,
- cada $S_{i \neq m}$ puede ser una proposición o una función proposicional,
- cada S_i es un supuesto de alcance limitado o se sigue de las proposiciones o funciones proposicionales anteriores por una regla de inferencia o por una equivalencia lógica y
- la última proposición S_m es la conclusión C.

Inferencias con funciones proposicionales

Observación

Nuestras reglas de inferencia trabajan con funciones proposicionales.

Inferencias con funciones proposicionales

Observación

Nuestras reglas de inferencia trabajan con funciones proposicionales.

Ejemplo

Aunque Fx y Gx son funciones proposicionales, la siguiente inferencia es correcta:

42	$Fx \supset Gx$	
43	Fx	
44	Gx	MP 42, 43

Inferencias con funciones proposicionales

Acerca de la validez

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de otras funciones proposionales?

Inferencias con funciones proposicionales

Acerca de la validez

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de otras funciones proposionales?

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de ciertas proposiciones?

Inferencias con funciones proposicionales

Acerca de la validez

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de otras funciones proposionales?

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de ciertas proposiciones?

¿En qué sentido puede decirse que una proposición válidamente se sigue de funciones proposionales?

Inferencias con funciones proposicionales

Acerca de la validez

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de otras funciones proposionales?

¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional válidamente se sigue de ciertas proposiciones?

¿En qué sentido puede decirse que una proposición válidamente se sigue de funciones proposionales?

Respuesta: Cuando cualquier instancia de sustitución produce un argumento válido.

Reglas de inferencia

Observación

El texto de *Lógica Simbólica* y el texto de *A Concise Introduction to Logic* presentan las reglas de inferencia gradualmente [Copi 2001, § 4.2 y § 4.5] y [Hurley y Watson 2016, § 8.2 y § 8.4]. Nuestra presentación corresponde a las reglas presentadas en [Hurley y Watson 2016, § 8.4] y empleadas por LogicCoach.

Reglas de inferencia

Instanciación de cuantificadores

«*Instantiation is an operation that consists in deleting a quantifier and replacing every variable bound by that quantifier with the same instantial letter.*» [Hurley y Watson 2016, pág. 481]

Reglas de inferencia

Instanciación de cuantificadores

«*Instantiation is an operation that consists in deleting a quantifier and replacing every variable bound by that quantifier with the same instantial letter.*» [Hurley y Watson 2016, pág. 481]

Generalización de cuantificadores

«*Generalization... is an operation that consists in (1) introducing a quantifier immediately prior to a statement, a statement function, or another quantifier, and (2) replacing one or more occurrences of a certain instantial letter in the statement or statement function with the same variable that appears in the quantifier. For universal generalization, all occurrences of the instantial letter must be replaced with the variable in the quantifier, and for existential generalization, at least one of the instantial letters must be replaced with the variable in the quantifier.*» [Hurley y Watson 2016, pág. 483]

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, b, \ldots, v, w$
- Atributos (predicados): Letras mayúsculas
- Variables de individuo: x, y y z
- $\mathfrak{F}$: Variable predicativa (representa cualquier símbolo de atributo)
- $\mathfrak{F}x$ y $\mathfrak{F}y$: Denotan funciones proposicionales
- $\mathfrak{F}a$: Denota una proposición

Regla de inferencia: Instanciación universal

Instanciación universal (UI)

$$\frac{(\forall x)\mathfrak{F}x}{\mathfrak{F}y} \qquad\qquad \frac{(\forall x)\mathfrak{F}x}{\mathfrak{F}a}$$

Regla de inferencia: Instanciación universal

Instanciación universal (UI)

$$\frac{(\forall x)\mathfrak{F}x}{\mathfrak{F}y} \qquad\qquad \frac{(\forall x)\mathfrak{F}x}{\mathfrak{F}a}$$

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 96)

Todos los hombres son mortales. Socrátes es humano. Luego, Socrátes es mortal.

1	$(\forall x)(Hx \supset Mx)$	
2	$Hs \quad / \therefore\ Ms$	
3	$Hs \supset Ms$	UI 1
4	Ms	MP 3, 2

Regla de inferencia: Generalización existencial

Generalización existencial (EG)

$$\frac{\mathfrak{F}a}{(\exists x)\mathfrak{F}x} \qquad\qquad \frac{\mathfrak{F}y}{(\exists x)\mathfrak{F}x}$$

Regla de inferencia: Generalización existencial

Generalización existencial (EG)

$$\frac{\mathfrak{F}a}{(\exists x)\mathfrak{F}x} \qquad\qquad \frac{\mathfrak{F}y}{(\exists x)\mathfrak{F}x}$$

Ejemplo

Un supuesto de la lógica de predicados es que existe al menos un individuo y las reglas de inferencia son consistentes con este supuesto.

Regla de inferencia: Generalización existencial

Generalización existencial (EG)

$$\frac{\mathfrak{F}a}{(\exists x)\mathfrak{F}x} \qquad\qquad \frac{\mathfrak{F}y}{(\exists x)\mathfrak{F}x}$$

Ejemplo

Un supuesto de la lógica de predicados es que existe al menos un individuo y las reglas de inferencia son consistentes con este supuesto.

1	$(\forall x)Ax \quad / \therefore\ (\exists x)Ax$	
2	Ax	UI 1
3	$(\exists x)Ax$	EG 2

Regla de inferencia: Instanciación existencial

Instanciación existencial (EI)

$$\frac{(\exists x)\mathfrak{F}x}{\mathfrak{F}a}$$

Restricción: El individuo a debe ser un individuo nuevo que no aparece en ningún renglón anterior (incluyendo el renglón de la conclusión del argumento).

Regla de inferencia: Instanciación existencial

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 123)

1	$(\forall x)(Fx \supset Gx)$	
2	$(\exists y)Fy \quad / \therefore \ (\exists z)Gz$	
3	Fa	EI 2
4	$Fa \supset Ga$	UI 1
5	Ga	MP 4, 3
6	$(\exists z)Gz$	EG 5

Regla de inferencia: Generalización universal

Generalización universal (UG)

$$\frac{\mathfrak{F}y}{(\forall x)\mathfrak{F}x}$$

Restricción: UG no debe ser usada dentro del alcance de un supuesto si la variable y está libre en la línea donde se introdujo el supuesto.

Restricción: UG no debe ser usada si la variable y está libre en cualquier línea precedente obtenida por EI.

Regla de inferencia: Generalización universal

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 481)

1	$(\forall x)(Ax \supset Bx)$	
2	$(\forall x)(Bx \supset Cx) \quad / \therefore \ (\forall x)(Ax \supset Cx)$	
3	$Ay \supset By$	UI 1
4	$By \supset Cy$	UI 2
5	$Ay \supset Cy$	HS 3, 4
6	$(\forall x)(Ax \supset Cx)$	UG 5

Regla de inferencia: Generalización universal

Ejemplo

1	$(\exists x)Fx \quad / \therefore \ (\forall x)Fx$	
2	Fa	EI 1
3	$(\forall x)Fx$	UG 2 Error!

Regla de inferencia: Generalización universal

Ejemplo

1	$(\exists x)Fx \quad / \therefore \ (\forall x)Fx$	
2	Fa	EI 1
3	$(\forall x)Fx$	UG 2 Error!

Error: La letra instanciada es una constante.

Reglas de inferencia

Observación

Las reglas de inferencia UI, UG, EI y EU son reglas de «renglón completo».

Reglas de inferencia

Observación

Las reglas de inferencia UI, UG, EI y EU son reglas de «renglón completo».

Sugerencias

Antes de comenzar a realizar ejercicios de construcción de pruebas formales, véase [Hurley y Watson 2016, págs. 488 y 519] en donde es ilustrado algunos de los errores comunes en el uso de las reglas de inferencia.

Demostraciones de validez de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio 3, pág. 101)

Construir una prueba formal de validez para el siguiente argumento:

1 $(\forall x)(Fx \supset {\sim}Gx)$

2 $(\exists x)(Hx \wedge Gx) \quad / \therefore \; (\exists x)(Hx \wedge {\sim}Fx)$

Demostraciones de validez de argumentos

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio 3, pág. 101)

Construir una prueba formal de validez para el siguiente argumento:

1	$(\forall x)(Fx \supset {\sim}Gx)$	
2	$(\exists x)(Hx \wedge Gx) \quad / \therefore \ (\exists x)(Hx \wedge {\sim}Fx)$	
3	$Ha \wedge Ga$	EI 2
4	$Fa \supset {\sim}Ga$	UI 1
5	Ha	Simp 3
6	Ga	Simp 3
7	${\sim}{\sim}Ga$	DN 6
8	${\sim}Fa$	MT 4, 7
9	$Ha \wedge {\sim}Fa$	Conj 5, 8
10	$(\exists x)(Hx \wedge {\sim}Fx)$	EG 9

Demostraciones de validez de argumentos

Ejercicio (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 488)

Construir una prueba formal de validez para el siguiente argumento:

1 $[\,(\exists x)Ax \wedge (\exists x)Bx\,] \supset Cj$

2 $(\exists x)(Ax \wedge Dx)$

3 $(\exists x)(Bx \wedge Ex) \quad /\therefore\ Cj$

Demostraciones de validez de argumentos

Ejercicio (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 488)

Construir una prueba formal de validez para el siguiente argumento:

1	$[\,(\exists x)Ax \wedge (\exists x)Bx\,] \supset Cj$	
2	$(\exists x)(Ax \wedge Dx)$	
3	$(\exists x)(Bx \wedge Ex) \quad / \therefore\ Cj$	
4	$Am \wedge Dm$	EI 2
5	$Bn \wedge En$	EI 3
6	Am	Simp 4
7	Bn	Simp 5
8	$(\exists x)Ax$	EG 6
9	$(\exists x)Bx$	EG 7
10	$(\exists x)Ax \wedge (\exists x)Bx$	Conj 8, 9
11	Cj	MP 1, 10

Regla de inferencia: Cambio de cuantificador

Cambio de cuantificador (CQ: Change of Quantifier)

$$
\begin{aligned}
(\forall x)\mathfrak{F}x &:: \sim(\exists x)\sim\mathfrak{F}x \\
\sim(\forall x)\mathfrak{F}x &:: (\exists x)\sim\mathfrak{F}x \\
(\forall x)\sim\mathfrak{F}x &:: \sim(\exists x)\mathfrak{F}x \\
\sim(\forall x)\sim\mathfrak{F}x &:: (\exists x)\mathfrak{F}x
\end{aligned}
$$

Verdades lógicas que involucran cuantificadores

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 134)

Demostrar que $[\,(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx\,] \supset (\forall x)(Fx \vee Gx)$.

Verdades lógicas que involucran cuantificadores

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 134)

Demostrar que $[\,(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx\,] \supset (\forall x)(Fx \vee Gx)$.

Primera parte

1	$(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx \quad / \therefore \ (\forall x)(Fx \vee Gx)$	
2	$\quad (\forall x)Fx$	ACP
3	$\quad Fy$	UI 2
4	$\quad Fy \vee Gy$	Add 3
5	$\quad (\forall x)(Fx \vee Gx)$	UG 4
6	$(\forall x)Fx \supset (\forall x)(Fx \vee Gx)$	CP 2–5

Ejemplo (continuación)

Segunda parte

7	$\quad(\forall x)Gx$	ACP
8	$\quad Gy$	UI 7
9	$\quad Fy \vee Gy$	Add 8
10	$\quad(\forall x)(Fx \vee Gx)$	UG 9
11	$(\forall x)Gx \supset (\forall x)(Fx \vee Gx)$	CP 7–10

Verdades lógicas que involucran cuantificadores

Ejemplo (continuación)

Finalmente

12	$[\,(\forall x)Fx \supset (\forall x)(Fx \vee Gx)\,]$	
	$\wedge\,[\,(\forall x)Gx \supset (\forall x)(Fx \vee Gx)\,]$	Conj 6, 11
13	$[\,(\forall x)(Fx \vee Gx)\,] \vee [\,(\forall x)(Fx \vee Gx)\,]$	CD 12, 1
14	$(\forall x)(Fx \vee Gx)$	Taut 13

Referencias

- Ackermann, W. (1954). Solvable Cases of the Decision Problem. North-Holland Publishing Company (vid. págs. 95, 96).
- Copi, Irving M. [1954] (2001). Lógica Simbólica. Trad. por Sestier Boulier, Andrés. 2.ª ed., 20.ª reimpresión. Compañía Editorial Continental (vid. págs. 19-21, 46-48, 53-74, 78-92, 95-98, 122, 126, 127, 132, 139, 140, 144, 145).
- Hurley, Patrick J. y Watson, Lori [1972] (2016). A Concise Introduction to Logic. 13.ª ed. Cengage Learning (vid. págs. 19-21, 122-124, 134, 137, 138, 141, 142).
- Löwenheim, Leopold [1915] (1967). On Possibilities in the Calculus of Relatives. En: From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. por van Heijenoort, Jean. Source Books in the History of the Sciences. Traducción de «*Über Möglichkeiten im Relativkalkül*». Mathematische Annalen, 1915, vol. 76.4, págs. 447–470. Traducido por Stefan Bauer-Mengelberg. Harvard University Press, págs. 83-97 (vid. págs. 95, 96).