CM0260 Lógica
Lógica de predicados con identidad

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2015-2

(Última actualización: 29 de junio de 2024)

Identidad

Principio de la identidad de los indiscernibles de Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646–1716)

«$x = y$ si y soló si cada atributo de x es una atributo de y y recíprocamente.» [Copi 2001, pág. 168]

Relación de identidad

Representación

La relación de identidad la representaremos por el signo igual ($=$).

Relación de identidad

Representación

La relación de identidad la representaremos por el signo igual ($=$).

Notación: $x \neq y$ significa $\sim(x = y)$.

Representación de enunciados simples que involucran identidad

Ejemplo

Septimus es Gabriel García Márquez.
(s: Septimus. g: Gabriel García Márquez)

Representación: $s = g$.

Representación de enunciados que involucran identidad: «solamente», «el único», «nadie... excepto»

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

Solamente Juan ama a María. (j: Juan. m: María. Axy: x ama a y)

Representación de enunciados que involucran identidad: «solamente», «el único», «nadie... excepto»

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

Solamente Juan ama a María. (j: Juan. m: María. Axy: x ama a y)

Versión incorrecta: Ajm

Representación de enunciados que involucran identidad: «solamente», «el único», «nadie... excepto»

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

Solamente Juan ama a María. (j: Juan. m: María. Axy: x ama a y)

Versión incorrecta: Ajm

Versión incorrecta: $Ajm \wedge (\forall x){\sim}Axm$

Representación de enunciados que involucran identidad: «solamente», «el único», «nadie... excepto»

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

Solamente Juan ama a María. (j: Juan. m: María. Axy: x ama a y)

Versión incorrecta: Ajm

Versión incorrecta: $Ajm \wedge (\forall x){\sim}Axm$

Versión correcta: $Ajm \wedge (\forall x)(Axm \supset x = j)$

Representación de enunciados que involucran identidad: «solamente», «el único», «nadie... excepto»

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

La única opera escrita por Beethoven es Fidelio. (Ox: x es una opera. Bx: Beethoven escribió x. f: Fidelio).

Representación: $Of \wedge Bf \wedge (\forall x)[\,(Ox \wedge Bx) \supset x = f\,]$

Representación de enunciados que involucran identidad: Superlativos

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

El municipio más pequeño está en Chocó.

Representación de enunciados que involucran identidad: Superlativos

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

El municipio más pequeño está en Chocó.

Versión incorrecta:

Mx: x es un municipio.
Cx: x está en el Chocó.
Px: x es el más pequeño.

Representación: $(\exists x)(Mx \wedge Cx \wedge Px)$

Error: Px no es una función proposicional.

Representación de enunciados que involucran identidad: Superlativos

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

El municipio más pequeño está en Chocó.

Versión correcta:

Mx: x es un municipio.
Cx: x está en el Chocó.
Pxy: x es más pequeño que y.

Representación: $(\exists x)\{Mx \wedge Cx \wedge (\forall y)[\,(My \wedge x \neq y) \supset Pxy\,]\}$

Representación de enunciados que involucran identidad: Descripciones definidas

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

El autor del texto «Lógica simbólica» fue un buen pedagogo. (Ax: x escribió el texto «Lógica simbólica». Px: x fue un buen pedagogo.)

Representación de enunciados que involucran identidad: Descripciones definidas

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

El autor del texto «Lógica simbólica» fue un buen pedagogo. (Ax: x escribió el texto «Lógica simbólica». Px: x fue un buen pedagogo.)

El enunciado afirma 3 cosas:

1. hay un individuo que escribió el texto «Lógica simbólica»,
2. a lo más, un individuo escribió el texto «Lógica simbólica» y
3. este individuo fue buen pedagogo.

Representación de enunciados que involucran identidad: Descripciones definidas

Ejemplo

Representar formalmente el enunciado:

El autor del texto «Lógica simbólica» fue un buen pedagogo. (Ax: x escribió el texto «Lógica simbólica». Px: x fue un buen pedagogo.)

El enunciado afirma 3 cosas:

1. hay un individuo que escribió el texto «Lógica simbólica»,
2. a lo más, un individuo escribió el texto «Lógica simbólica» y
3. este individuo fue buen pedagogo.

Representación: $(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(Ay \supset y = x) \wedge Px]$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Exceptuar. Excluir a alguien o algo de la generalidad de lo que se trata o de la regla común [RAE 2022].

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

- Hay al menos un individuo que tiene el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

- Hay al menos un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)Px$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

- Hay al menos un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)Px$

- Hay al menos dos individuos que tienen el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

- Hay al menos un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)Px$

- Hay al menos dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)(Px \wedge Py \wedge x \neq y)$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

- Hay al menos un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)Px$

- Hay al menos dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)(Px \land Py \land x \neq y)$

- Hay al menos tres individuos que tienen el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Al menos)

- Hay al menos un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)Px$

- Hay al menos dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)(Px \wedge Py \wedge x \neq y)$

- Hay al menos tres individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Px \wedge Py \wedge Pz \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (A lo sumo)

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (A lo sumo)

- Hay a lo sumo un individuo que tiene el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (A lo sumo)

- Hay a lo sumo un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\forall x)(\forall y)[\,(Px \wedge Py) \supset x = y\,]$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (A lo sumo)

- Hay a lo sumo un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\forall x)(\forall y)[\,(Px \wedge Py) \supset x = y\,]$

- Hay a lo sumo dos individuos que tienen el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (A lo sumo)

- Hay a lo sumo un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\forall x)(\forall y)[\,(Px \wedge Py) \supset x = y\,]$

- Hay a lo sumo dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\,(Px \wedge Py \wedge Pz) \supset (x = y \vee x = z \vee y = z)\,]$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

- Hay exactamente un individuo que tiene el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

- Hay exactamente un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

- Hay exactamente un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)[\, Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

- Hay exactamente dos individuos que tienen el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

- Hay exactamente un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

- Hay exactamente dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)[\,Px \wedge Py \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[\,Pz \supset (z = x \vee z = y)\,]\,]$

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

- Hay exactamente un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

- Hay exactamente dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)[\,Px \wedge Py \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[\,Pz \supset (z = x \vee z = y)\,]\,]$

- Hay exactamente tres individuos que tienen el atributo Px.

Representación de enunciados que involucran identidad: Enunciados exceptivos

Ejemplos (Exactamente)

- Hay exactamente un individuo que tiene el atributo Px.

  $(\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

- Hay exactamente dos individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists x)(\exists y)[\,Px \wedge Py \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[\,Pz \supset (z = x \vee z = y)\,]\,]$

- Hay exactamente tres individuos que tienen el atributo Px.

  $(\exists w)(\exists x)(\exists y)[\,Pw \wedge Px \wedge Py \wedge w \neq x \wedge w \neq y \wedge x \neq y (\forall z)[\,Pz \supset (z = w \vee z = x \vee z = y)\,]\,]$

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 530)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

La única amiga que tengo es Elizabeth. Elizabeth no es Nancy. Nancy es Canadiense. Por lo tanto, existe una Canadiense quien no es mi amiga. (Ax: x es mi amiga. Cx: x es Canadiense. e: Elizabet. n: Nancy.)

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 530)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

La única amiga que tengo es Elizabeth. Elizabeth no es Nancy. Nancy es Canadiense. Por lo tanto, existe una Canadiense quien no es mi amiga. (Ax: x es mi amiga. Cx: x es Canadiense. e: Elizabet. n: Nancy.)

Representación:

1 $Ae \wedge (\forall x)(Ax \supset x = e)$

2 $e \neq n$

3 $Cn \quad / \therefore \ (\exists x)(Cx \wedge {\sim}Ax)$

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 3, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El estado más pequeño está en Nueva Inglaterra. Todos los estados de Nueva Inglaterra son primordialmente industriales. Por lo tanto, el estado más pequeño es primordialmente industrial. (Ex: x es un estado. Nx: x está en Nueva Inglaterra. Ix: x es primordialmente industrial. Mxy: x es más pequeño que y.)

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 3, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El estado más pequeño está en Nueva Inglaterra. Todos los estados de Nueva Inglaterra son primordialmente industriales. Por lo tanto, el estado más pequeño es primordialmente industrial. (Ex: x es un estado. Nx: x está en Nueva Inglaterra. Ix: x es primordialmente industrial. Mxy: x es más pequeño que y.)

Representación:

1 $(\exists x)\{[Ex \wedge Nx \wedge (\forall y)[\,(Ey \wedge y \neq x) \supset Mxy\,]\}$

2 $(\forall x)((Ex \wedge Nx) \supset Ix)$

$\therefore\ (\exists x)\{Ex \wedge Ix \wedge (\forall y)[\,(Ey \wedge y \neq x) \supset Mxy\,]\}$

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 4*, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El corredor más rápido es un escandinavo. Por lo tanto, cualquiera que no sea escandinavo puede ser vencido en una carrera por alguna persona. (Px: x es una persona. Ex: x es escandinavo. Rxy: x corre más rápidamente que y.)

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 4*, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El corredor más rápido es un escandinavo. Por lo tanto, cualquiera que no sea escandinavo puede ser vencido en una carrera por alguna persona. (Px: x es una persona. Ex: x es escandinavo. Rxy: x corre más rápidamente que y.)

Representación:

1 $(\exists x)\{Px \land Ex \land (\forall y)[\,(Py \land y \neq x) \supset Rxy\,]\}$

$/ \therefore\; (\forall x)[\,(Px \land {\sim}Ex) \supset (\exists y)(Py \land Ryx)\,]$

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 5, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Todos los participantes serán vencedores. Habrá cuando más un vencedor. Hay cuando menos un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante. (Px: x es un participante. Vx: x será vencedor.)

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 5, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Todos los participantes serán vencedores. Habrá cuando más un vencedor. Hay cuando menos un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante. (Px: x es un participante. Vx: x será vencedor.)

Representación:

1 $(\forall x)(Px \supset Vx)$

2 $(\forall x)(\forall y)[\,(Vx \wedge Vy) \supset x = y\,]$

3 $(\exists x)Px \quad / \therefore\ (\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 7, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Adams y Brown fueron los únicos invitados al banquete que bebieron. Todos los invitados al banquete que llevaron licor bebieron. Adam no llevó licor. Si algún invitado al banquete bebió entonces algún invitado al banquete que bebió debió llevar licor. Todos los que bebieron se embriagaron. Por lo tanto, el invitado al banquete que llevó licor se embriagó. (a: Adams. b: Brown. Ix: x fue un invitado al banquete. Bx: x bebió. Lx: x llevó licor. Ex: x se embriagó.)

Representación de argumentos que involucran identidad

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 7, pág. 176)

Representar el siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Adams y Brown fueron los únicos invitados al banquete que bebieron. Todos los invitados al banquete que llevaron licor bebieron. Adam no llevó licor. Si algún invitado al banquete bebió entonces algún invitado al banquete que bebió debió llevar licor. Todos los que bebieron se embriagaron. Por lo tanto, el invitado al banquete que llevó licor se embriagó. (a: Adams. b: Brown. Ix: x fue un invitado al banquete. Bx: x bebió. Lx: x llevó licor. Ex: x se embriagó.)

Representación:

1 $(\forall x)[\,(Ix \wedge Bx) \supset (x = a \vee x = b)\,]$
2 $(\forall x)[\,(Ix \wedge Lx) \supset Bx\,]$
3 $\sim La$
4 $(\exists x)(Ix \wedge Bx) \supset (\exists x)(Ix \wedge Bx \wedge Lx)$
5 $(\forall x)(Bx \supset Ex) \quad / \therefore\ (\forall x)[\,(Ix \wedge Lx) \supset Ex\,]$

Reglas de inferencia para la identidad

Reglas de inferencia[1]

$$\frac{}{x = x}\ (\mathrm{Id1})$$

$$x = y :: y = x\ (\mathrm{Id2})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{F}x \\ x = y\end{array}}{\mathfrak{F}y}\ (\mathrm{Id3})$$

[1]Para le presentación de la regla Id1, el texto [Hurley y Watson 2016, pág. 529] adiciona una premisa genérica.

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 168)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Henry era William Sidney Porter. Henry era un escritor. Por lo tanto, William Sidney Porter era un escritor. (h: Henry. s: William Sidney Porter. Ex: x era un escritor.)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 168)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Henry era William Sidney Porter. Henry era un escritor. Por lo tanto, William Sidney Porter era un escritor. (h: Henry. s: William Sidney Porter. Ex: x era un escritor.)

1 $h = s$

2 $Eh \quad / \therefore \; Es$

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 168)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Henry era William Sidney Porter. Henry era un escritor. Por lo tanto, William Sidney Porter era un escritor. (h: Henry. s: William Sidney Porter. Ex: x era un escritor.)

1 $h = s$

2 $Eh \quad / \therefore \; Es$

3 Es Id3 2, 1

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 169)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Solo un hombre calvo porta una peluca. Kaplan es un hombre que porta una peluca. Este hombre no es calvo. Por lo tanto, este hombre no es Kaplan. (k: Kaplan. e: Este hombre. Hx: x es un hombre. Cx: x es calvo. Px: x porta una peluca.)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejemplo pág. 169)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Solo un hombre calvo porta una peluca. Kaplan es un hombre que porta una peluca. Este hombre no es calvo. Por lo tanto, este hombre no es Kaplan. (k: Kaplan. e: Este hombre. Hx: x es un hombre. Cx: x es calvo. Px: x porta una peluca.)

Representación:

1 $(\forall x)[\,(Hx \wedge Px) \supset Cx\,]$

2 $Hk \wedge Pk$

3 $\sim Ce \quad / \therefore\ \sim(e = k)$

(continua en la próxima diapositiva)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (continuación)

1	$(\forall x)[\,(Hx \wedge Px) \supset Cx\,]$	
2	$Hk \wedge Pk$	
3	$\sim Ce \quad / \therefore\ \sim(e = k)$	
4	$\quad e = k$	AIP
5	$\quad k = e$	Id2 4
6	$\quad (Hk \wedge Pk) \supset Ck$	UI 1
7	$\quad Ck$	MP 6, 2
8	$\quad Ce$	Id3 7, 2
9	$\quad Ce \wedge \sim Ce$	Conj 8, 3
10	$\sim(e = k)$	IP 4–9

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 530-1)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

La única amiga que tengo es Elizabeth. Elizabeth no es Nancy. Nancy es Canadiense. Por lo tanto, existe una Canadiense quien no es mi amiga. (Ax: x es mi amiga. Cx: x es Canadiense. e: Elizabet. n: Nancy.)

Representación:

1 $Ae \wedge (\forall x)(Ax \supset x = e)$

2 $e \neq n$

3 $Cn \quad / \therefore \ (\exists x)(Cx \wedge {\sim}Ax)$

(continua en la próxima diapositiva)

Ejemplo (continuación)

1	$Ae \wedge (\forall x)(Ax \supset x = e)$	
2	$e \neq n$	
3	$Cn \quad / \therefore \ (\exists x)(Cx \wedge {\sim}Ax)$	
4	$(\forall x)(Ax \supset x = e)$	Simp 1
5	$An \supset n = e$	UI 4
6	$n \neq e$	ID2 2
7	${\sim}An$	MT 5, 6
8	$Cn \wedge {\sim}An$	Conj 3, 7
9	$(\exists x)(Cx \wedge {\sim}Ax)$	EG 8

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 1, pág. 176)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El arquitecto que diseño el Tappan Hall solamente diseña edificios de oficinas. Por lo tanto, el Tappan Hall es un edificio de oficinas. (Ax: x es arquitecto. t: Tappan Hall. Dxy: x diseño a y. Ox: x es un edificio de oficinas.)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 1, pág. 176)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El arquitecto que diseño el Tappan Hall solamente diseña edificios de oficinas. Por lo tanto, el Tappan Hall es un edificio de oficinas. (Ax: x es arquitecto. t: Tappan Hall. Dxy: x diseño a y. Ox: x es un edificio de oficinas.)

Representación:

1 $(\exists x)[\,Ax \land Dxt \land (\forall y)[\,(Ay \land Dyt) \supset y = x\,] \land (\forall z)(Dxz \supset Oz)\,]$

$/ \therefore\ Ot$

(continua en la próxima diapositiva)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (continuación)

1 $(\exists x)[\,Ax \wedge Dxt \wedge (\forall y)[\,(Ay \wedge Dyt) \supset y = x\,] \wedge (\forall z)(Dxz \supset Oz)\,]$

$/ \therefore\ Ot$

2	$Aa \wedge Dat \wedge (\forall y)[\,(Ay \wedge Dyt) \supset y = a\,] \wedge (\forall z)(Daz \supset Oz)$	EI 1
3	$(\forall z)(Daz \supset Oz)$	Simp 2
4	$Dat \supset Ot$	UI 3
5	Dat	Simp 2
6	Ot	MP 4, 5

(continua en la próxima diapositiva)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (continuación)

En la demostración de la validez del argumento

$$(\exists x)[\,Ax \wedge Dxt \wedge (\forall y)[\,(Ay \wedge Dyt) \supset y = x\,] \wedge (\forall z)(Dxz \supset Oz)\,]$$

$$/ \therefore\ Ot$$

la información $(\forall y)[\,(Ay \wedge Dyt) \supset y = x\,]$ no fue empleada.

En la diapositiva de la pág. 60 se muestra un ejemplo donde este tipo de información es necesaria para demostrar la validez del argumento.

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 2*, pág. 176)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El profesor de griego de la Escuela Preparatoria es muy instruido. Por lo tanto, todos los profesores de griego de la Escuela Preparatoria son muy instruidos. (Px: x es un profesor de griego. Sx: x está en la Escuela Preparatoria. Ix: x es muy instruido.)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 2*, pág. 176)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

El profesor de griego de la Escuela Preparatoria es muy instruido. Por lo tanto, todos los profesores de griego de la Escuela Preparatoria son muy instruidos. (Px: x es un profesor de griego. Sx: x está en la Escuela Preparatoria. Ix: x es muy instruido.)

Representación:

1 $(\exists x)\{Px \wedge Sx \wedge Ix \wedge (\forall y)[\,(Py \wedge Sy) \supset x = y\,]\}$

$/\therefore\ (\forall x)[\,(Px \wedge Sx) \supset Ix\,]$

(continua en la próxima diapositiva)

Ejemplo (continuación)

1	$(\exists x)\{Px \wedge Sx \wedge Ix \wedge (\forall y)[(Py \wedge Sy) \supset x = y]\}$	$/ \therefore \ (\forall x)[(Px \wedge Sx) \supset Ix]$
2	$\quad \mid Pz \wedge Sz$	ACP
3	$\quad \mid Pa \wedge Sa \wedge Ia \wedge (\forall y)[(Py \wedge Sy) \supset a = y]$	EI 1
4	$\quad \mid (\forall y)[(Py \wedge Sy) \supset a = y]$	Simp 3
5	$\quad \mid (Pz \wedge Sz) \supset a = z$	UI 4
6	$\quad \mid a = z$	MP 5, 2
7	$\quad \mid Ia$	Simp 3
8	$\quad \mid Iz$	Id3 7, 6
9	$(Pz \wedge Sz) \supset Iz$	CP 2–10
10	$(\forall x)[(Px \wedge Sx) \supset Ix]$	UG 11

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 5, pág. 176)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Todos los participantes serán vencedores. Habrá cuando más un vencedor. Hay cuando menos un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante. (Px: x es un participante. Vx: x será vencedor.)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (Copi [2001], ejercicio 5, pág. 176)

Demostrar la validez del siguiente argumento empleando el símbolo de identidad y las abreviaciones indicadas:

Todos los participantes serán vencedores. Habrá cuando más un vencedor. Hay cuando menos un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante. (Px: x es un participante. Vx: x será vencedor.)

Representación:

1 $(\forall x)(Px \supset Vx)$

2 $(\forall x)(\forall y)[\,(Vx \wedge Vy) \supset x = y\,]$

3 $(\exists x)Px \quad / \therefore\ (\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$

(continua en la próxima diapositiva)

Ejemplo (continuación)

1	$(\forall x)(Px \supset Vx)$	
2	$(\forall x)(\forall y)[\,(Vx \wedge Vy) \supset x = y\,]$	
3	$(\exists x)Px \quad / \therefore \; (\exists x)[\,Px \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$	
4	Pa	EI 3
5	$\quad Py$	ACP
6	$\quad Pa \supset Va$	UI 1
7	$\quad Py \supset Vy$	UI 1
8	$\quad Va$	MP 6, 4
9	$\quad Vy$	MP 7, 5
10	$\quad Va \wedge Vy$	Conj 7, 9

(continua en la próxima diapositiva)

Demostraciones de validez de argumentos

Ejemplo (continuación)

11	$\quad\mid\ (\forall y)[\,(Va \wedge Vy) \supset a = y\,]$	UI 2
12	$\quad\mid\ (Va \wedge Vy) \supset a = y$	UI 11
13	$\quad\mid\ a = y$	MP 10, 9
14	$Py \supset a = y$	CP 5–13
15	$(\forall y)(Py \supset a = y)$	UG 14
16	$Pa \wedge (\forall y)(Py \supset a = y)$	Conj 4, 15
17	$(\exists x)[\,x \wedge (\forall y)(Py \supset x = y)\,]$	EG 16

Diapositivas extras

Más allá de la lógica de predicados de primer orden

Algunas características de la lógica de predicados de primer orden

- Cuantificación sobre individuos.
- Los predicados (los atributos y las relaciones) tienen como argumentos individuos.

Más allá de la lógica de predicados de primer orden

Algunas características de la lógica de predicados de primer orden

- Cuantificación sobre individuos.
- Los predicados (los atributos y las relaciones) tienen como argumentos individuos.

Algunas características de las lógicas de orden superior orden

'*The adjective "first-order" is used to distinguish the languages... from those in which are predicates having other predicates or functions as arguments, or quantification over functions or predicates, or both.*' [Mendelson 2015, pág. 53]

Lógica de segundo orden

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, b, \ldots, v, w$
- Variables de individuo: x, y y z
- Predicados (atributos o relaciones): $A, B, \ldots, V, W$
- Variables predicativas: X, Y y Z

Lógica de segundo orden

Ejemplo (Principio de inducción matemática)

Supongamos que estamos trabajando en un teoría formal de la aritmética donde la constante 0 y la función succ han sido introducidas.

Lógica de segundo orden

Ejemplo (Principio de inducción matemática)

Supongamos que estamos trabajando en un teoría formal de la aritmética donde la constante 0 y la función succ han sido introducidas.

- Representación empleando la lógica de predicados de primer orden:
  Sea Ax una función proposicional, entonces

$$[\,A0 \wedge (\forall x)(Ax \supset A(\mathrm{succ}(x)))\,] \supset (\forall x)Ax.$$

Lógica de segundo orden

Ejemplo (Principio de inducción matemática)

Supongamos que estamos trabajando en un teoría formal de la aritmética donde la constante 0 y la función succ han sido introducidas.

- Representación empleando la lógica de predicados de primer orden:
  Sea Ax una función proposicional, entonces

$$[\,A0 \wedge (\forall x)(Ax \supset A(\mathrm{succ}(x))\,] \supset (\forall x)Ax.$$

- Representación empleando la lógica de predicados de segundo orden:

$$(\forall X)\{[\,X0 \wedge (\forall x)(Xx \supset X(\mathrm{succ}(x))\,] \supset (\forall x)Xx\}.$$

Lógica de segundo orden

Ejemplo (Principio de sustitutividad)

$$(\forall X)(\forall x)(\forall y)[\,(Xx \wedge x = y) \supset Xy\,].$$

Lógica de segundo orden

Ejemplo (Principio de sustitutividad)

$$(\forall X)(\forall x)(\forall y)[\,(Xx \land x = y) \supset Xy\,].$$

Ejemplo (Principio de la identidad de los indiscernibles de Leibniz)

$$(\forall x)(\forall y)[\,(x = y) \equiv (\forall X)(Xx \equiv Xy)\,].$$

Lógica de segundo orden

Ejemplo (Principio de sustitutividad)

$$(\forall X)(\forall x)(\forall y)[\,(Xx \wedge x = y) \supset Xy\,].$$

Ejemplo (Principio de la identidad de los indiscernibles de Leibniz)

$$(\forall x)(\forall y)[\,(x = y) \equiv (\forall X)(Xx \equiv Xy)\,].$$

Ejemplo (Principio de bivalencia)

$$(\forall X)(\forall x)(Xx \vee {\sim}Xx).$$

Lógica de segundo orden

Ejemplo

- Sócrates tiene todos los atributos $(\forall X)Xs$

Lógica de segundo orden

Ejemplo

- Sócrates tiene todos los atributos $(\forall X)Xs$
- Sócrates tiene algún atributo $(\exists X)Xs$

Lógica de segundo orden

Ejemplo

- Sócrates tiene todos los atributos $(\forall X)Xs$
- Sócrates tiene algún atributo $(\exists X)Xs$
- Todo individuo tiene todos los atributos $(\forall x)(\forall X)Xx$

Lógica de segundo orden

Ejemplo

- Sócrates tiene todos los atributos $(\forall X)Xs$
- Sócrates tiene algún atributo $(\exists X)Xs$
- Todo individuo tiene todos los atributos $(\forall x)(\forall X)Xx$
- Algún individuo tiene todos los atributos $(\exists x)(\forall X)Xx$

Lógica de tercer orden

Convenciones

- Constantes de individuo: $a, b, \ldots, v, w$
- Variables de individuo: x, y y z
- Predicados (atributos o relaciones): $A, B, \ldots, V, W$
- Variables predicativas: X, Y y Z
- Predicados de predicados: $\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{W}$

Lógica de tercer orden

Ejemplo

- Todos los atributos útiles son deseables:
  $\mathcal{U}X$: X es un atributo útil
  $\mathcal{D}X$: X es un atributo deseable

  Representación: $(\forall X)(\mathcal{U}X \supset \mathcal{D}X)$

Lógica de tercer orden

Ejemplo

- Todos los atributos útiles son deseables:
  $\mathcal{U}X$: X es un atributo útil
  $\mathcal{D}X$: X es un atributo deseable

  Representación: $(\forall X)(\mathcal{U}X \supset \mathcal{D}X)$

- Algunos atributos deseables no son útiles: $(\exists X)(\mathcal{D}X \wedge {\sim}\mathcal{U}X)$

Lógica de orden superior

Lógicas de ordenes arbitrarios

Se pueden emplear procedimientos similares a los empleados para definir las lógicas de segundo y tercer orden para definir lógicas de ordenes arbitrarios.

Lógica de orden superior

Los procedimientos para obtener las lógicas de ordenes arbitrarios se generalizan para obtener una lógica llamada *higher-order logic* o ω-*order logic* o *finite type theory*:

> *It seems very natural to extend the system* F *of first-order logic by permitting quantification on predicate, propositional, and function variables as well as individual variables. One thus obtains the wffs of a system of second-order logic. One might then introduce predicate and function variables of higher type to denote relations and functions whose arguments may be relations and functions of individuals as well as individuals. Thus one would be led to a system of third-order logic, and if one permitted quantification with respect to these new variables, one would obtain a system of fourth-order logic. This process can be continued indefinitely to obtain logics of arbitrarily high order. Of course, after a while one runs out of different types of letters to use for different types of variables, but this problem can be solved by introducing type symbols to indicate the types of variables, and using a letter with type symbol* α *as subscript for a variable of type* α*. [Andrews 2002, p. 201]*

Referencias

- Andrews, Peter B. [1986] (2002). An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof. 2.ª ed. Vol. 27. Applied Logic Series. Kluwer (vid. pág. 85).
- Copi, Irving M. [1954] (2001). Lógica Simbólica. Trad. por Sestier Boulier, Andrés. 2.ª ed., 20.ª reimpresión. Compañía Editorial Continental (vid. págs. 2, 39-46, 48-52, 56, 57, 60, 61, 63, 64).
- Hurley, Patrick J. y Watson, Lori [1972] (2016). A Concise Introduction to Logic. 13.ª ed. Cengage Learning (vid. págs. 37, 38, 47, 54).
- Mendelson, Elliott [1964] (2015). Introduction to Mathematical Logic. 6.ª ed. CRC Press (vid. págs. 68, 69).
- Real Academia Española (RAE), ed. (2022). Diccionario de la lengua española. 23.ª ed., versión electrónica 23.6. URL: https://dle.rae.es (visitado 13-01-2023) (vid. pág. 17).