CM0246 Estructuras Discretas
§ 6.1 Teoría de conjuntos: definiciones y el método del argumento del elemento

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

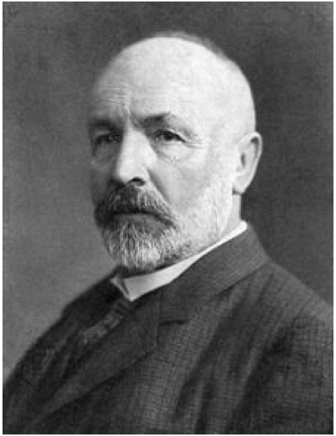
Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Introducción



Georg Cantor (1845 – 1918)
(imágenes tomadas de Wikipedia)

Introducción

Términos primitivos

En la teoría de conjuntos los términos conjunto y elemento son primitivos, es decir, son indefinidos.

Introducción

Términos primitivos

En la teoría de conjuntos los términos conjunto y elemento son primitivos, es decir, son indefinidos.

Conjunto: descripción de Cantor

> *By an **aggregate** (Menge) we are to understand any collection into a whole M of definite and separate objects m of our intuition or our thought. These objects are called the **elements** of M. [Cantor 1955, p. 85]*
>
> *Colección M de todos los objetos definidos y separados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento. Estos objetos se llaman los elementos de M. [pág. 336]*

Introducción

Teorías de conjuntos

La teoría de conjuntos de Cantor es una teoría no axiomática. Esta teoría también es llamada «teoría ingenua de conjuntos» (*naive set theory*).

Introducción

Teorías de conjuntos

La teoría de conjuntos de Cantor es una teoría no axiomática. Esta teoría también es llamada «teoría ingenua de conjuntos» (*naive set theory*).

Algunas teorías axiomáticas:

- Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)
- Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección (ZFC)
- Teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG)
- Teoría de conjuntos de Tarski-Grothendieck (TG)

Introducción

La teoría axiomática de conjuntos es un sistema fundacional para las matemáticas

- «*Our axioms provide a sufficient collection of assumptions for the development of the whole of mathematics—a remarkable fact.*» [Enderton 1977, p. 11]
- «*Experience has shown that practically all notions used in contemporary mathematics can be defined, and their mathematical properties derived, in this axiomatic system. In this sense, the axiomatic set theory serves as a satisfactory foundations for the other branches of mathematics.*» [Hrbacek y Jech 1999, p. 3]
- «*Conventional mathematics is based on ZFC (the Zermelo-Fraenkel axioms, including the Axiom of Choice). Working withing ZFC, one develops . . . all the mathematics found in basic texts on analysis, topology, algebra, etc.*» [Kunen 2013, p. 1]

Introducción

Relación (binaria) de pertenencia

$x \in S$: El elemento x pertenece al conjunto S.
$x \notin S$: El elemento x no pertenece al conjunto S.

Observación

Note que

$$x \notin S \Leftrightarrow \sim(x \in S)$$

Introducción

Especificando conjuntos

- Listando sus elementos

$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Introducción

Especificando conjuntos

- Listando sus elementos
$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$
- Empleando puntos suspensivos
$$D = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Introducción

Especificando conjuntos

- Listando sus elementos
$$\mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}.$$
- Empleando puntos suspensivos
$$\mathrm{D} = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$
- Empleando una propiedad

  Sea S un conjunto y sea $P(x)$ una propiedad que los elementos de S pueden o no pueden satisfacer, entonces podemos definir el conjunto
$$A = \{\, x \in S \mid P(x) \,\}.$$

Introducción

Algunos conjuntos númericos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} && \text{(conjunto de los números naturales)}\\
\mathbf{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{(conjunto de los números enteros)}\\
\mathbf{Z}^+ &= \{1, 2, 3, \ldots\} && \text{(conjunto de los números enteros positivos)}\\
\mathbf{Z}^- &= \{\ldots, -3, -2, -1\} && \text{(conjunto de los números enteros negativos)}\\
\mathbf{R} &= (-\infty, \infty) && \text{(conjunto de los números reales)}\\
\mathbf{R}^+ &= (0, \infty) && \text{(conjunto de los números reales positivos)}\\
\mathbf{R}^- &= (-\infty, 0) && \text{(conjunto de los números reales negativos)}
\end{aligned}
$$

Introducción

Ejemplo

Algunos conjuntos.

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$
$$B = \{\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}\},$$
$$C = \{\mathbf{N}, \mathrm{a}\}.$$

Introducción

Axioma de extensión

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos entonces los conjuntos son iguales.

Introducción

Axioma de extensión

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos entonces los conjuntos son iguales.

Ejemplo

Como consecuencia del axioma de extensión tenemos que:

$$\{b, c, a\} = \{a, b, c\} \qquad \text{(el orden de los elementos no importa)}$$

$$\{4, 5, 6\} = \{4, 5, 5, 6\} \qquad \text{(no hay elementos repetidos)}$$

Tema

Subconjuntos: demostración y refutación

Definición

Un conjunto A es un **subconjunto** de un conjunto B, denotado $A \subseteq B$, si y solo si, cualquier elemento de A es también un elemento de B, es decir

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \text{ si } x \in A \text{ entonces } x \in B.$$

Subconjuntos: demostración y refutación

Definición

Un conjunto A es un **subconjunto** de un conjunto B, denotado $A \subseteq B$, si y solo si, cualquier elemento de A es también un elemento de B, es decir

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \text{ si } x \in A \text{ entonces } x \in B.$$

Por lo tanto, si el conjunto A **no es subconjunto** del conjunto B, denotado $A \not\subseteq B$, significa que algún elemento de A no es elemento de B, es decir,

$$A \not\subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Subconjuntos: demostración y refutación

Definición

Un conjunto A es un **subconjunto propio** de un conjunto B, si y solo si,

(i) $A \subseteq B$ y

(ii) existe al menos un elemento en B que no está en A.

Subconjuntos: demostración y refutación

Definición

El **argumento del elemento** es un método de demostración empleado para demostrar que un conjunto es un subconjunto de otro:

> *Sean los conjuntos X y Y dados. Para demostrar que $X \subseteq Y$,*
>
> (i) *suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de X,*
>
> (ii) *demuestre que x es un elemento de Y.*

Subconjuntos: demostración y refutación

Ejemplo

Sean A y B los conjuntos

$$A = \{\, m \in \mathbf{Z} \mid m = 6r + 12, r \in \mathbf{Z} \,\},$$
$$B = \{\, n \in \mathbf{Z} \mid n = 3s, s \in \mathbf{Z} \,\}.$$

(i) Demostrar que $A \subseteq B$.

(ii) Refutar que $B \subseteq A$.

Demostración y refutación

En el tablero.

Tema

Igualdad de conjuntos

Definición

Un conjunto A es **igual** a un conjunto B, denotado $A = B$, si y solo si, cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A, es decir

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Igualdad de conjuntos

Definición

Un conjunto A es **igual** a un conjunto B, denotado $A = B$, si y solo si, cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A, es decir

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Observación

Podemos emplear el método del argumento del elemento para demostrar la igualdad entre conjuntos.

Tema

Operaciones entre conjuntos

Operaciones

Sea $\mathbb{U}$ el **conjunto universo** o el **universo del discurso**.

Operaciones entre conjuntos

Operaciones

Sea $\mathbb{U}$ el **conjunto universo** o el **universo del discurso**.

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in A \text{ o } x \in B \,\} && \text{(unión)}\\
A \cap B &= \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in A \text{ y } x \in B \,\} && \text{(intersección)}\\
B - A &= \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in B \text{ y } x \notin A \,\} && \text{(diferencia)}\\
A^{\mathrm{c}} &= \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \notin A \,\} && \text{(complemento)}
\end{aligned}
$$

Operaciones entre conjuntos

Definición

Sean $A_0, A_1, A_2, \ldots$ subconjuntos de un conjunto universo $\mathbb{U}$ indexados por $i \in \mathbf{N}$.

La **unión** (finita e infinita) de la colección indexada de conjuntos $A_0, A_1, A_2, \ldots$ están definidas por:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=0}^{n} A_i &= \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in A_i, \text{ para al menos una } i = 0, 1, \ldots, n \,\}\\ &= A_0 \cup \cdots \cup A_n.\end{aligned}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in A_i, \text{ para al menos una } i \in \mathbf{N} \,\}.$$

Operaciones entre conjuntos

Definición

Sean $A_0, A_1, A_2, \ldots$ subconjuntos de un conjunto universo $\mathbb{U}$ indexados por $i \in \mathbf{N}$.

La **intersección** (finita e infinita) de la colección indexada de conjuntos $A_0, A_1, A_2, \ldots$ están definida por:

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=0}^{n} A_i &= \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in A_i, \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, n \,\} \\ &= A_0 \cap \cdots \cap A_n.\end{aligned}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{\, x \in \mathbb{U} \mid x \in A_i, \text{ para todo } i \in \mathbf{N} \,\}.$$

Operaciones entre conjuntos

Ejemplo

Sea $i \in \mathbf{N}$ y sean los conjuntos $A_i = [i, \infty)$ subconjuntos de los números reales. Es decir, $A_0 = [0, \infty)$, $A_1 = [1, \infty)$, $A_2 = [2, \infty)$, ... Entonces:

$$\bigcup_{i=0}^{2} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 = [0, \infty) = A_0, \qquad \bigcap_{i=0}^{2} A_i = A_0 \cap A_1 \cap A_2 = [2, \infty) = A_2,$$

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_0, \qquad \bigcap_{i=0}^{n} A_i = A_n,$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A_0, \qquad \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset.$$

Tema

Conjunto vacío

Definición

El **conjunto vacío**, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\emptyset &= \{\, x \mid x \neq x \,\} \\
&= \{1, 2\} \cap \{3, 4\}.
\end{aligned}
$$

Conjunto vacío

Definición

El **conjunto vacío**, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\emptyset &= \{\, x \mid x \neq x \,\} \\
&= \{1, 2\} \cap \{3, 4\}.
\end{aligned}
$$

Observación

La existencia del conjunto vacío se establece vía axiomática.

Conjunto vacío

Definición
El **conjunto vacío**, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos.

Ejemplo
$$\begin{aligned}\emptyset &= \{\, x \mid x \neq x \,\} \\ &= \{1, 2\} \cap \{3, 4\}.\end{aligned}$$

Observación
La existencia del conjunto vacío se establece vía axiomática.

Observación
Note que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Tema

Particiones de conjuntos

Definición

Dos conjuntos A y B son **disjuntos**, si y solo si, no tienen elementos comunes, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Particiones de conjuntos

Definición

Dos conjuntos A y B son **disjuntos**, si y solo si, no tienen elementos comunes, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Definición

Los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ son **mutuamente disjuntos**, si y solo si,

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j.$$

Particiones de conjuntos

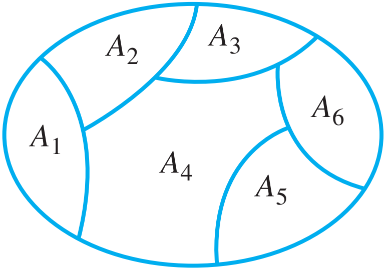
Definición

Sea A un conjunto. Una colección finita o infinita de conjuntos no vacíos $A_1, A_2, \ldots$ es una **partición** de A, si y solo si,

(i) El conjunto A es la unión de todo A_i.

(ii) Los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente disjuntos.

Gráficamente (Fig. 8.3.1)



Tema

Conjunto potencia

Definición

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, denotado $\mathcal{P}(A)$, es el **conjunto potencia** (o **conjunto de partes**) de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{\, B \mid B \subseteq A \,\}.$$

Conjunto potencia

Definición

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, denotado $\mathcal{P}(A)$, es el **conjunto potencia** (o **conjunto de partes**) de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{\, B \mid B \subseteq A \,\}.$$

Observación

La existencia del conjunto potencia se establece vía axiomática.

Conjunto potencia

Definición

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, denotado $\mathcal{P}(A)$, es el **conjunto potencia** (o **conjunto de partes**) de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{\, B \mid B \subseteq A \,\}.$$

Observación

La existencia del conjunto potencia se establece vía axiomática.

Ejemplo

$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Tema

Productos cartesianos

Definición

El **par ordenado** (a, b) es el conjunto en el que a es su primer elemento y b es su segundo elemento.

Productos cartesianos

Definición

El **par ordenado** (a, b) es el conjunto en el que a es su primer elemento y b es su segundo elemento.

Definición

Dos pares ordenados son **iguales**, si y solo si, sus primeros y segundos elementos son iguales, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

Productos cartesianos

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \,\}.$$

Productos cartesianos

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \,\}.$$

Ejemplo

Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Entonces

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2)(b, 3)\},$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Productos cartesianos

Definición

La n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es el conjunto en la que a_1 es su primer elemento, a_2 es el segundo elemento,... y a_n es el n-ésimo elemento.

Productos cartesianos

Definición

La n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es el conjunto en la que a_1 es su primer elemento, a_2 es el segundo elemento,... y a_n es el n-ésimo elemento.

Definición

Dos n-tuplas ordenadas son **iguales**, si y solo si, cada par correspondiente de sus elementos son iguales. Es decir,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Productos cartesianos

Definición

El **producto cartesiano de** n **conjuntos** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, es el conjunto de n-tuplas

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \,\}.$$

Tema

Referencias

- Cantor, Georg [1915] (1955). Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Translation of *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Mathematische Annalen, 1895, vol. 46.2, pp. 481–512 and 1897, vol. 49.2, pp. 207–246. Translated, and provided with an introduction and notes, by Philip E. B. Jourdain. Dover Publications (vid. págs. 6, 7).
- Enderton, Herbert B. (1977). Elements of Set Theory. Academic Press (vid. pág. 10).
- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas [1978] (1999). Introduction to Set Theory. Third Edition, Revised and Expanded. Marcel Dekker (vid. pág. 10).
- Kunen, Kenneth [2011] (2013). Set Theory. Revised edition. Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications (vid. pág. 10).