# CM0246 Estructuras Discretas
# § 10.2 Senderos, rutas y circuitos

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

# Preliminares

## Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

# Esquema de la presentación

Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

Circuitos hamiltonianos

Referencias

# Tema

Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

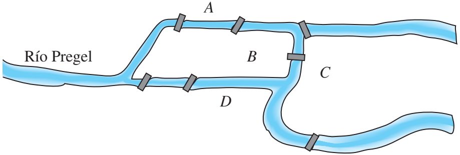
Circuitos hamiltonianos

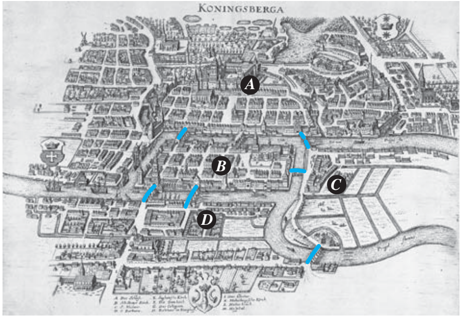
Referencias

## El problema de los puentes de Königsberg

Euler en 1736 propuso (y resolvió) el siguiente problema (Fig. 10.2.1):

«¿Es posible que una persona dé un recorrido por la ciudad, comenzando y terminando en la misma ubicación y cruzando cada uno de los siete puentes exactamente una vez?»




Merian-Erben

# Tema


Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

Circuitos hamiltonianos

Referencias

# Caminos

## Observación

Desafortunadamente la terminología empleada en la Teoría de Grafos no es estándar. Por esta razón siempre es necesario tener presente con cuales definiciones se está trabajando.

# Caminos

## Definición

Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ vértices de $G$. Un **camino de** $v$ **a** $w$ es una sucesión finita alternada de vértices adyacentes y aristas de $G$

$$v_0\, e_1\, v_1\, e_2 \ldots v_{n-1}\, e_n\, v_n,$$

donde:

(i) las ves representan vértices,

(ii) las es representan aristas,

(iii) $v_0 = v$,

(iv) $v_n = w$ y

(v) para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, los vértices $v_{i-1}$ y $v_i$ son los puntos extremos de $e_i$.

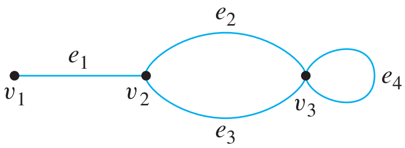
# Caminos triviales

## Definición

Sea $G$ un grafo y sea $v$ un vértice de $G$. El **camino trivial de $v$ a $v$** consiste del único vértice $v$.

# Notación para caminos

## Ejemplo 10.2.1.a



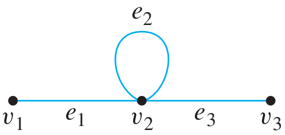

(i) La notación $e_1\, e_2\, e_4\, e_3$ denota el camino $v_1\, e_1\, v_2\, e_2\, v_3\, e_4\, v_3\, e_3\, v_2$.

(ii) La notación $e_1$ no denota ningún camino porque es ambigua.

(iii) La notación $v_2\, v_3$ no denota ningún camino porque es ambigua.

# Notación para caminos

## Ejemplo 10.2.1.b




La notación $v_1\ v_2\ v_2\ v_3$ denota el camino $v_1\ e_1\ v_2\ e_2\ v_2\ e_3\ v_3$.

# Senderos y trayectorias

## Definiciones

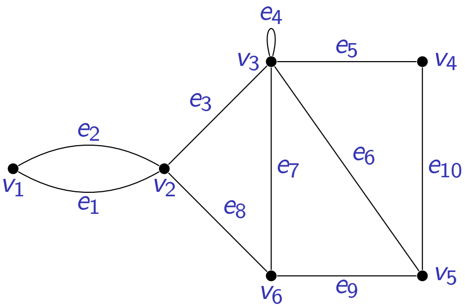
(i) Un **sendero de** $v$ **a** $w$ es un camino de $v$ a $w$ que no contiene aristas repetidas.

(ii) Una **trayectoria de** $v$ **a** $w$ es un sendero que no contienen vértices repetidos.

# Senderos y trayectorias

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son senderos o trayectorias.

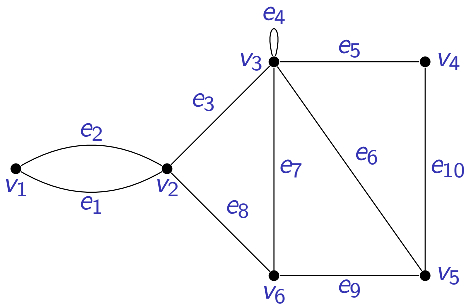



(i) $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$

# Senderos y trayectorias

## Ejemplo 10.2.2

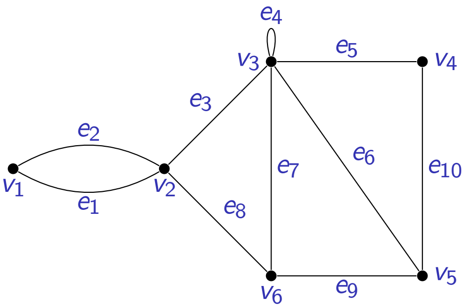
Determinar cuáles de los siguientes caminos son senderos o trayectorias.




(i) $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
Es sendero pero no es trayectoria porque el vértice $v_3$ está repetido.

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son senderos o trayectorias.



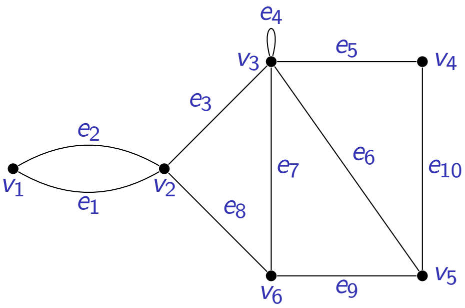

(i) $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
Es sendero pero no es trayectoria porque el vértice $v_3$ está repetido.

(ii) $e_1\ e_3\ e_5\ e_5\ e_6$

# Senderos y trayectorias

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son senderos o trayectorias.

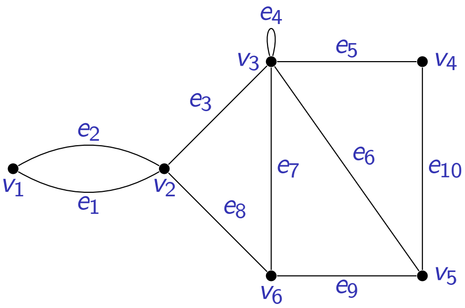



(i) $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
Es sendero pero no es trayectoria porque el vértice $v_3$ está repetido.

(ii) $e_1\ e_3\ e_5\ e_5\ e_6$
No es sendero (ni trayectoria) porque la arista $e_5$ está repetida.

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son senderos o trayectorias.




(i) $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
Es sendero pero no es trayectoria porque el vértice $v_3$ está repetido.

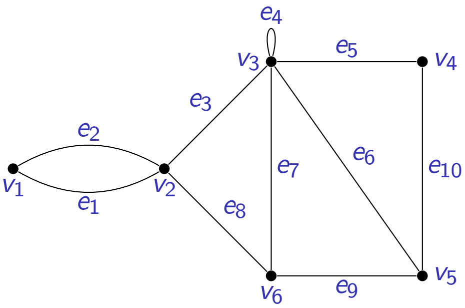
(ii) $e_1\ e_3\ e_5\ e_5\ e_6$
No es sendero (ni trayectoria) porque la arista $e_5$ está repetida.

(iii) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$

# Senderos y trayectorias

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son senderos o trayectorias.




(i) $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
Es sendero pero no es trayectoria porque el vértice $v_3$ está repetido.

(ii) $e_1\ e_3\ e_5\ e_5\ e_6$
No es sendero (ni trayectoria) porque la arista $e_5$ está repetida.

(iii) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$
Es sendero pero no es trayectoria porque el vértice $v_2$ está repetido.

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Definiciones

(i) Un **camino cerrado** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.

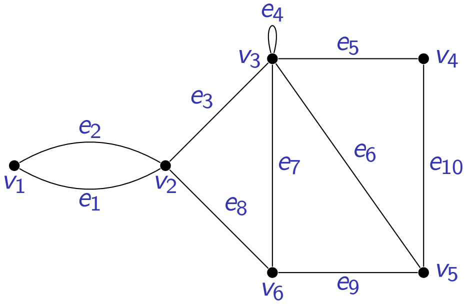
(ii) Un **circuito** es un camino cerrado que contiene al menos una arista y no contiene una arista repetida.

(iii) Un **circuito simple** es un circuito que no tiene cualquier otro vértice repetido excepto el primero y el último.

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son caminos cerrados, circuitos o circuitos simples.

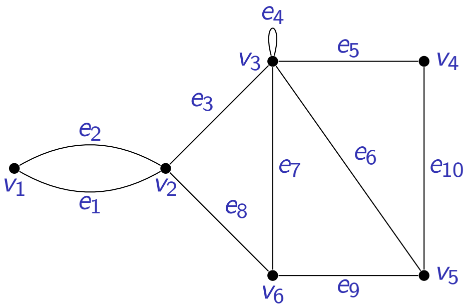



(i) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son caminos cerrados, circuitos o circuitos simples.



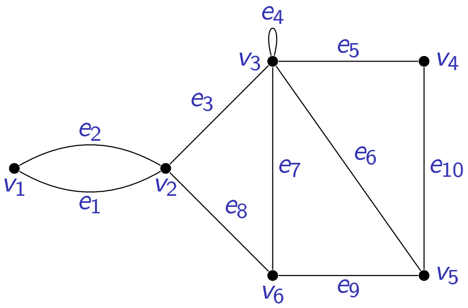

(i) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$

Es un circuito (y camino cerrado) pero no es un circuito simple porque el vértice $v_3$ está repetido.

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son caminos cerrados, circuitos o circuitos simples.



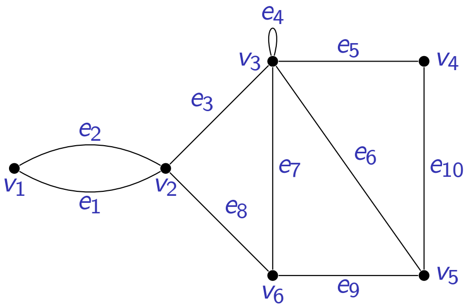

(i) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$
Es un circuito (y camino cerrado) pero no es un circuito simple porque el vértice $v_3$ está repetido.

(ii) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_2$

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son caminos cerrados, circuitos o circuitos simples.




(i) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$

Es un circuito (y camino cerrado) pero no es un circuito simple porque el vértice $v_3$ está repetido.

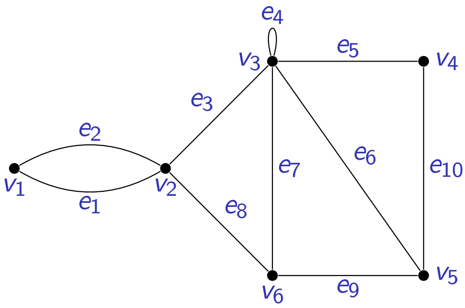
(ii) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_2$

Es un circuito simple, porque es un circuito y no tiene vértices repetidos.

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son caminos cerrados, circuitos o circuitos simples.




(i) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$
Es un circuito (y camino cerrado) pero no es un circuito simple porque el vértice $v_3$ está repetido.

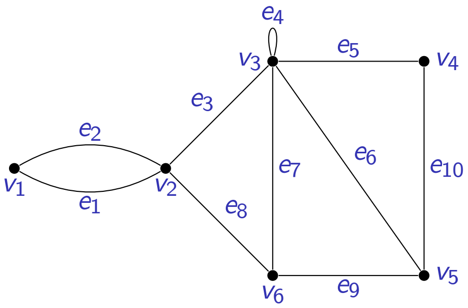
(ii) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_2$
Es un circuito simple, porque es un circuito y no tiene vértices repetidos.

(iii) $v_1\ e_1\ v_2\ e_1\ v_1$
Es un camino cerrado pero no es un circuito porque la arista $e_1$ está repetida.

# Caminos cerrados, circuitos y circuitos simples

## Ejemplo 10.2.2

Determinar cuáles de los siguientes caminos son caminos cerrados, circuitos o circuitos simples.




(i) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_3\ v_6\ v_2$
Es un circuito (y camino cerrado) pero no es un circuito simple porque el vértice $v_3$ está repetido.

(ii) $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_2$
Es un circuito simple, porque es un circuito y no tiene vértices repetidos.

(iii) $v_1\ e_1\ v_2\ e_1\ v_1$
Es un camino cerrado pero no es un circuito porque la arista $e_1$ está repetida.

(iv) $v_1$
Es un camino cerrado pero no es un circuito porque no contiene al menos una arista.

# Tema

Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

Circuitos hamiltonianos

Referencias

# Vértices y grafos conexos

## Definición

Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ vértices de $G$. Los vértices $v$ **y** $w$ **son conexos**, si y solo si, existe un camino de $v$ a $w$.

# Vértices y grafos conexos

### Definición

Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ vértices de $G$. Los vértices $v$ **y** $w$ **son conexos**, si y solo si, existe un camino de $v$ a $w$.

### Definición

Un grafo $G$ es **conexo**, si y solo si, dados cualesquiera dos vértices $v$ y $w$ de $G$, hay un camino de $v$ a $w$.

# Vértices y grafos conexos

### Definición

Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ vértices de $G$. Los vértices $v$ **y** $w$ **son conexos**, si y solo si, existe un camino de $v$ a $w$.

### Definición

Un grafo $G$ es **conexo**, si y solo si, dados cualesquiera dos vértices $v$ y $w$ de $G$, hay un camino de $v$ a $w$.

### Ejemplo

Discutir si los grafos en diapositivas anteriores son o no conexos.

# Componentes conexos

## Definición

Un grafo $H$ es un **componente conexo**[*] de un grafo $G$, si y solo si,

(i) $H$ es subgrafo de $G$,

(ii) $H$ es conexo y

(iii) ningún subgrafo conexo de $G$ tiene a $H$ como subgrafo y contiene vértices o aristas que no están en $H$.

[*] Véase correcciones al texto guía en la página web del curso.

# Componentes conexos

## Definición

Un grafo $H$ es un **componente conexo**[*] de un grafo $G$, si y solo si,

(i) $H$ es subgrafo de $G$,

(ii) $H$ es conexo y

(iii) ningún subgrafo conexo de $G$ tiene a $H$ como subgrafo y contiene vértices o aristas que no están en $H$.

## Ejemplo

Discutir si los grafos en diapositivas anteriores tienen o no componentes conexos.

[*] Véase correcciones al texto guía en la página web del curso.

# Componentes conexos

## Definición

Un grafo $H$ es un **componente conexo**[*] de un grafo $G$, si y solo si,

(i) $H$ es subgrafo de $G$,

(ii) $H$ es conexo y

(iii) ningún subgrafo conexo de $G$ tiene a $H$ como subgrafo y contiene vértices o aristas que no están en $H$.

## Ejemplo

Discutir si los grafos en diapositivas anteriores tienen o no componentes conexos.

## Observación

Cualquier grafo es un «unión» de sus componentes conexos.

[*] Véase correcciones al texto guía en la página web del curso.

# Tema


Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

Circuitos hamiltonianos

Referencias

# Circuitos de Euler

### Definición

Sea $G$ un grafo. Un **circuito de Euler** para $G$ es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de $G$.

# Circuitos de Euler

## Definición

Sea $G$ un grafo. Un **circuito de Euler** para $G$ es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de $G$.

## Observación

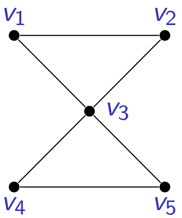
Note que un circuito de Euler para un grafo $G$ es una sucesión de vértices adyacentes y aristas de $G$ que:

(i) tiene al menos una arista,
(ii) que comienza y termina en el mismo vértice,
(iii) que utiliza cada vértice de $G$ por lo menos una vez y
(iv) que utiliza cada cada arista de $G$ exactamente una vez.

# Circuitos de Euler

## Ejemplo

Para el grafo de la figura un circuito de Euler es $v_1\ v_3\ v_5\ v_4\ v_3\ v_2\ v_1$.

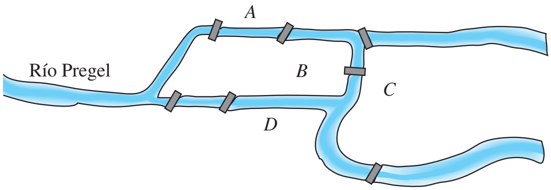


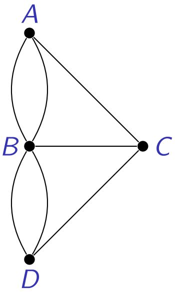

Observar que el vértice $v_3$ está repetido en el circuito.

# Circuitos de Euler

## Pregunta

¿Existe un circuito de Euler en el grafo que representa el problema de los puentes de Königsberg?



# Circuitos de Euler

### Teorema 10.2.2

Si un grafo tiene un circuito de Euler, entonces todos los vértices del grafo tienen grado positivo par.

### Demostración

En el tablero.

# Circuitos de Euler

## Observación

Recordar que el **contrapositivo** del enunciado condicional $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$ y que ambos enunciados son lógicamente equivalentes.

# Circuitos de Euler

## Observación

Recordar que el **contrapositivo** del enunciado condicional $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$ y que ambos enunciados son lógicamente equivalentes.

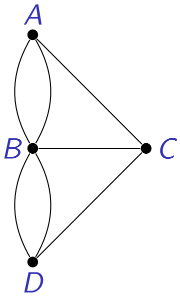
## Contrapositivo del Teorema 10.2.2

Si algún vértice de un grafo tiene grado impar, entonces el grafo no tiene un circuito de Euler.

# Circuitos de Euler

## Ejemplo

El grafo que representa el problema de los puentes de Königsberg no tiene un circuito de Euler porque tiene al menos un vértice de grado impar (de hecho, todos los vértices son de grado impar).



# Circuitos de Euler

## Observación

Recordar que el **converso** del enunciado condicional $p \to q$ es $q \to p$ y que ambos enunciados no son lógicamente equivalentes.

# Circuitos de Euler

## Observación

Recordar que el **converso** del enunciado condicional $p \to q$ es $q \to p$ y que ambos enunciados no son lógicamente equivalentes.

## Pregunta

Converso del Teorema 10.2.2. ¿Si cada vértice de un grafo tiene grado positivo par, entonces el grafo tiene un circuito de Euler?

# Circuitos de Euler

## Observación

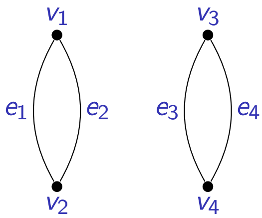
Recordar que el **converso** del enunciado condicional $p \to q$ es $q \to p$ y que ambos enunciados no son lógicamente equivalentes.

## Pregunta

Converso del Teorema 10.2.2. ¿Si cada vértice de un grafo tiene grado positivo par, entonces el grafo tiene un circuito de Euler?

## Respuesta

No. El grafo de la figura es un contraejemplo.



# Circuitos de Euler

## Teorema 10.2.4

Un grafo tiene un circuito de Euler, si y solo si, el grafo es conexo y cada vértice del grafo tiene grado par positivo.

# Senderos de Euler

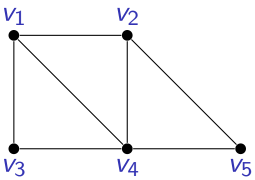
## Definición

Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ dos vértices distintos de $G$. Un **sendero de Euler de $v$ a $w$** es una sucesión de aristas adyacentes y vértices que comienza en $v$, termina en $w$, pasa a través de cada vértice de $G$ por lo menos una vez y atraviesa cada arista de $G$ exactamente una vez.

# Senderos de Euler

## Ejemplo

Para el grafo de la figura un sendero de Euler de $v_1$ a $v_2$ es $v_1\ v_3\ v_4\ v_5\ v_2\ v_4\ v_1\ v_2$.




Observar que el grafo no tiene un circuito de Euler porque el grado del vértice $v_1$ (o del vértice $v_2$) es impar.

# Senderos de Euler

## Corolario 10.2.5

Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ dos vértices distintos de $G$. Existe una sendero de Euler de $v$ a $w$, si y solo si, $G$ es conexo, $v$ y $w$ tienen grado impar y todos los otros vértices de $G$ tienen grado par positivo.*

*Véase correcciones al texto guía en la página web del curso.

# Tema

Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

Circuitos hamiltonianos

Referencias

# Circuitos hamiltonianos

## Problema del dodecaedro

Un dodecaedro es una figura sólida con 12 caras pentagonales idénticas y 20 vértices.* Suponiendo que cada vértice representa una ciudad, Hamilton planteó el siguiente problema:

¿Es posible recorrer cada ciudad exactamente una vez y regresar a la ciudad de partida?

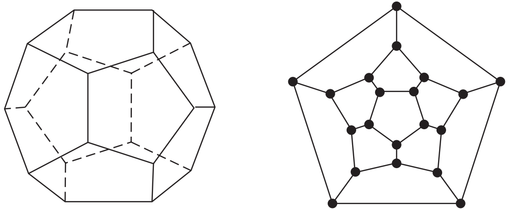


*Figura tomada de [Rosen 2012, pág. 699].

# Circuitos hamiltonianos

## Problema del dodecaedro (continuación)

El circuito denotado con líneas azules es una solución al problema.*

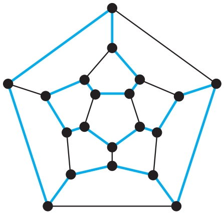


*Figura tomada de [Rosen 2012, § 10.5, Fig. 9].

# Circuitos hamiltonianos

## Definición

Dado un grafo $G$, un **circuito hamiltoniano** para $G$ es un circuito simple que incluye todos los vértices de $G$.

# Circuitos hamiltonianos

### Definición

Dado un grafo $G$, un **circuito hamiltoniano** para $G$ es un circuito simple que incluye todos los vértices de $G$.

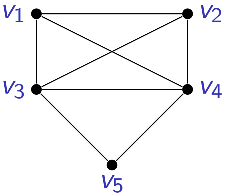
### Observación

Note que un circuito hamiltoniano para un grafo es una sucesión de vértices adyacentes y aristas distintas en las que aparece exactamente una vez cada vértice del grafo, excepto el primero y el último, que son los mismos.

# Circuitos hamiltonianos

## Ejemplo

Para el grafo de la figura un circuito hamiltoniano es $v_1 v_2 v_4 v_5 v_3 v_1$.




Observar que el circuito no pasa por todas las aristas del grafo.

# Circuitos hamiltonianos

## Proposición 10.2.6

Si un grafo $G$ tiene un circuito hamiltoniano, entonces $G$ tiene un subgrafo $H$ con las propiedades siguientes:

(i) $H$ contiene todos los vértices de $G$.

(ii) $H$ es conexo.

(iii) $H$ tiene el mismo número de aristas que de vértices.

(iv) Cada vértice de $H$ tiene grado $2$.

# Circuitos hamiltonianos

## Proposición 10.2.6

Si un grafo $G$ tiene un circuito hamiltoniano, entonces $G$ tiene un subgrafo $H$ con las propiedades siguientes:

(i) $H$ contiene todos los vértices de $G$.

(ii) $H$ es conexo.

(iii) $H$ tiene el mismo número de aristas que de vértices.

(iv) Cada vértice de $H$ tiene grado $2$.

## Observación

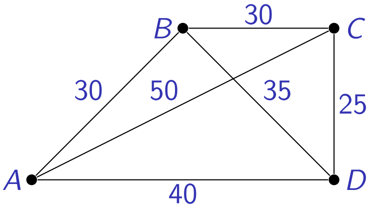
El contrapositivo de la Proposición 10.2.6 puede emplearse para determinar que un grafo no tiene un circuito hamiltoniano.

# El problema del agente viajero

## Ejemplo 10.2.9

El grafo de la figura representa cuatro ciudades y las distancias entre éstas en kilómetros.

«Supongamos que un vendedor debe viajar a cada ciudad exactamente una vez, comenzando y terminando en la ciudad $A$. ¿Qué ruta de ciudad a ciudad minimizará la distancia total que debe recorrer?»

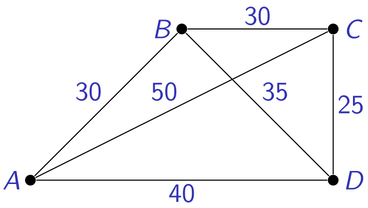



(continua en la próxima diapositiva)

# El problema del agente viajero

## Ejemplo 10.2.9 (continuación)

Todos los posibles circuitos de hamiltonianos (rutas) y sus distancias en kilómetros.




| Ruta | Distancia total |
|---|---|
| $ABCDA$ | 125 |
| $ABDCA$ | 140 |
| $ACBDA$ | 155 |
| $ACDBA$ | 140 |
| $ADBCA$ | 155 |
| $ADCBA$ | 125 |

El viajero debería escoger la ruta $ABCDA$ o la ruta $ADCBA$.

# El problema del agente viajero

## Algunas observaciones

(i) El Ejemplo 10.2.9 es una instancia del **problema del agente viajero**, TSP por sus siglas en inglés (*traveling salesman problem*).

# El problema del agente viajero

## Algunas observaciones

(i) El Ejemplo 10.2.9 es una instancia del **problema del agente viajero**, TSP por sus siglas en inglés (*traveling salesman problem*).

(ii) El TSP es uno de los problemas más estudiados en optimización (teórica y práctica).

# El problema del agente viajero

## Algunas observaciones

(i) El Ejemplo 10.2.9 es una instancia del **problema del agente viajero**, TSP por sus siglas en inglés (*traveling salesman problem*).

(ii) El TSP es uno de los problemas más estudiados en optimización (teórica y práctica).

(iii) En la actualidad no se conoce una solución eficiente (complejidad algorítmica) al problema y tampoco se sabe si ésta puede existir (problema $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$).

# Tema

Introducción

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Conectividad

Circuitos y senderos de Euler

Circuitos hamiltonianos

Referencias

# Referencias


- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- Rosen, Kenneth H. [1988] (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. 7.ª ed. McGraw-Hill (vid. págs. 50, 51).