# CM0246 Estructuras Discretas
# § 8.5 Relaciones de orden parcial

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 3 de mayo de 2025)

# Preliminares

## Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

# Esquema de la presentación

# Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

# Introducción

Se pueden emplear relaciones sobre un conjunto para ordenar algunos o todos los elementos del conjunto.

# Introducción

Se pueden emplear relaciones sobre un conjunto para ordenar algunos o todos los elementos del conjunto.

Ejemplo (algunas relaciones de orden)

- Palabras en un diccionario
  $(a, b) \in R$ si $a$ es una palabra que está antes que la palabra $b$ en el diccionario.

# Introducción

Se pueden emplear relaciones sobre un conjunto para ordenar algunos o todos los elementos del conjunto.

Ejemplo (algunas relaciones de orden)

- Palabras en un diccionario
  $(a, b) \in R$ si $a$ es una palabra que está antes que la palabra $b$ en el diccionario.
- Genealogía académica
  $(a, b) \in R$ si la persona $a$ fue el director de la tesis de la persona $b$.

# Introducción

Se pueden emplear relaciones sobre un conjunto para ordenar algunos o todos los elementos del conjunto.

Ejemplo (algunas relaciones de orden)

- Palabras en un diccionario
  $(a, b) \in R$ si $a$ es una palabra que está antes que la palabra $b$ en el diccionario.
- Genealogía académica
  $(a, b) \in R$ si la persona $a$ fue el director de la tesis de la persona $b$.
- Programación de trabajos/proyectos
  $(a, b) \in R$ si $a$ es una tarea que debe ser completada antes que la tarea $b$ comience.

# Tema

# Relaciones antisimétricas

## Definición

Sea $R$ una relación sobre un conjunto $A$.

$R$ es **antisimétrica** $\quad\Leftrightarrow\quad$ para toda $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ entonces $x = y$.

# Relaciones antisimétricas

## Ejemplo

La relación $\leq$ en los números reales $\mathbf{R}$ es una relación antisimétrica.

# Relaciones antisimétricas

## Ejemplo 8.5.2

Se definen las siguientes relaciones:

$$\text{para toda } a, b \in \mathbf{Z}^{+}, a\, R_1\, b \Leftrightarrow a \mid b,$$

$$\text{para toda } a, b \in \mathbf{Z}, a\, R_2\, b \Leftrightarrow a \mid b.$$

Para las relaciones $R_1$ y $R_2$ tenemos:

(i) La relación $R_1$ es antisimétrica.
En el tablero.

(ii) La relación $R_2$ no es antisimétrica.
En el tablero.

# Relaciones antisimétricas

## Ejemplo (la relación de subconjunto)

Sea $\mathcal{C}$ un colección de conjuntos.

Observar que el concepto de subconjunto es un relación sobre $\mathcal{C}$.

La relación $\subseteq$ es una relación antisimétrica porque para todos $A, B \in \mathcal{C}$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

# Relaciones de orden parcial

### Definición

Sea $A$ un conjunto y $R$ una relación sobre $A$. La relación $R$ es una **relación de orden parcial sobre** $A$, si y solo si, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

# Relaciones de orden parcial

## Ejemplo

La relación $\leq$ en los números reales $\mathbf{R}$ es una relación de orden parcial.

# Relaciones de orden parcial

## Ejemplo 8.5.3 (la relación de subconjunto)

Sea $\mathcal{C}$ un colección de conjuntos. La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{C}$ es un relación de orden parcial.

# Relaciones de orden parcial

## Ejemplo 8.5.4

La relación de divisibilidad $(|)$ sobre los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ es una relación de orden parcial.

# Conjuntos parcialmente ordenados

## Notación

El símbolo $\preceq$ denota una relación de orden parcial arbitraria.

# Conjuntos parcialmente ordenados

## Notación

El símbolo $\preceq$ denota una relación de orden parcial arbitraria.

## Definición

Un conjunto $A$ es un **conjunto parcialmente ordenado (o *poset*) respecto a una relación** $\preceq$, si y solo si, la relación $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre $A$.

# Conjuntos parcialmente ordenados

## Ejemplo

Los siguientes conjuntos son parcialmente ordenados respecto a la relación indicada:

(i) El conjunto de los números reales $\mathbf{R}$ respecto a la relación menor o igual a $(\leq)$.

(ii) El conjunto de partes de un conjunto respecto a la relación de subconjunto $(\subseteq)$.

(iii) El conjunto de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ respecto a la relación de divisibilidad $(|)$.

# Conjuntos parcialmente ordenados

## Notación

En lugar de escribir «sea $A$ un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación $\preceq$» escribiremos «sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado».*

*Esta notación no es usada por el texto guía.

# Conjuntos parcialmente ordenados

## Notación

En lugar de escribir «sea $A$ un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación $\preceq$» escribiremos «sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado».*

## Ejemplo

Los siguientes conjuntos son conjuntos parcialmente ordenados:

(i) $(\mathbf{R}, \leq)$.

(ii) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde $A$ es un conjunto.

(iii) $(\mathbf{Z}^+, |)$.

*Esta notación no es usada por el texto guía.

# Tema

# Diagramas de Hasse

## Descripción

En lugar de representar una relación de orden parcial por una grafo dirigido ésta se puede representar por un **diagrama de Hasse**.

# Diagramas de Hasse

## Construcción de un diagrama de Hasse a partir de un grafo dirigido

(i) Construir el grafo dirigido de la relación de tal forma que todas las flechas apunten hacia arriba.

(ii) Remover los bucles.

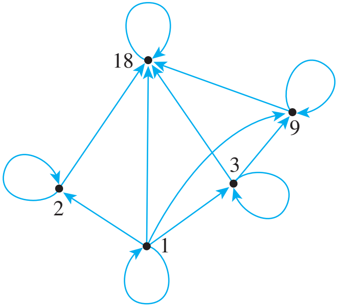
(iii) Remover las flechas que deberían estar porque la relación es transitiva.

(iv) Convertir el grafo dirigido en un grafo no dirigido.

# Diagramas de Hasse

## Ejemplo

Grafo dirigido y diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\{1, 2, 3, 9, 18\}, |)$.




Grafo dirigido (figura pág 503).

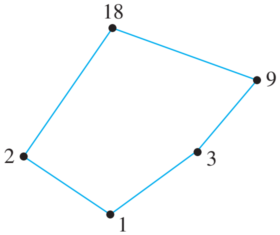
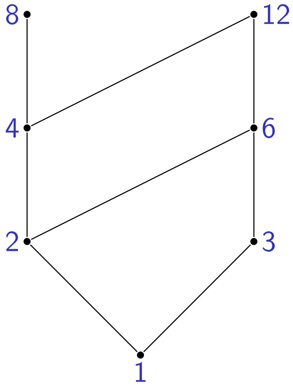



Diagrama de Hasse (figura pág 504).

# Diagramas de Hasse

## Ejemplo

Diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$.

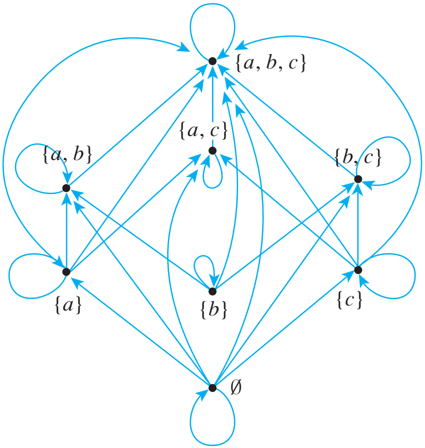


Ejemplo 8.5.7

Sea $A = \{a, b, c\}$. La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$ es una relación de orden parcial.

### Ejemplo 8.5.7

Sea $A = \{a, b, c\}$. La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$ es una relación de orden parcial.



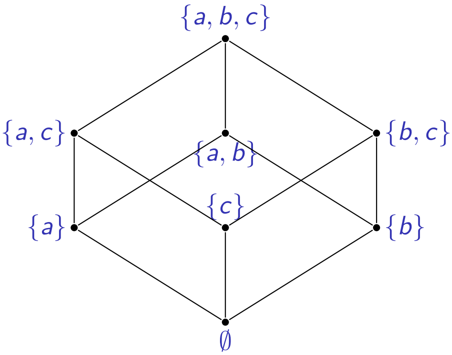




Figura pág. 504.

# Tema

# Ordenes lexicográficos

## Ejemplo

Sea $\preceq$ la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2).$$

# Ordenes lexicográficos

## Ejemplo

Sea $\preceq$ la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2).$$

(i) Es $(3, 100) \preceq (4, 4)$?

# Ordenes lexicográficos

## Ejemplo

Sea $\preceq$ la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2).$$

(i) Es $(3, 100) \preceq (4, 4)$?

(ii) Es $(3, 5) \preceq (3, 4)$?

# Ordenes lexicográficos

## Definición

Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. La relación de **orden lexicográfico sobre** $A \times B$, denotada $\preceq$, está definida por [Lipschutz y Lipson 2007]:*

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \prec_A a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \preceq_B b_2).$$

*Esta definición no está en el texto guía.

# Ordenes lexicográficos

## Teorema

Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. La relación de orden lexicográfico $\preceq$ sobre $A \times B$ es un relación de orden parcial, es decir, el conjunto $(A \times B, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado [Lipschutz y Lipson 2007].*

*Este teorema no está en el texto guía.

# Ordenes lexicográficos

## Definición

Sean $(A_1, \preceq_1), \ldots, (A_n, \preceq_n)$ conjuntos parcialmente ordenados. La relación de **orden lexicográfico sobre** $A_1 \times \cdots \times A_n$, denotada $\preceq$, está definida por [Lipschutz y Lipson 2007]:*

Para todas las $n$-tuplas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \preceq (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow (\exists m > 0)(\forall i < m)(a_i = b_i \text{ y } a_m \preceq_m b_m).$$

Es decir, $(a_1, \ldots, a_n) \preceq (b_1, \ldots, b_n)$, si y solo si, $a_m \preceq_m b_m$ y todos los términos precedentes son iguales.

*Esta definición no está en el texto guía.

# Ordenes lexicográficos

### Teorema

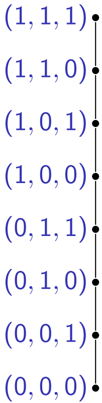
Sean $(A_1, \preceq_1), \ldots, (A_n, \preceq_n)$ conjuntos parcialmente ordenados. La relación de orden lexicográfico $\preceq$ sobre $A_1 \times \cdots \times A_n$ es una relación de orden parcial, es decir, el conjunto $(A_1 \times \cdots \times A_n, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado [Lipschutz y Lipson 2007].*

*Este teorema no está en el texto guía.

# Ordenes lexicográficos

## Ejemplo

Sea $(A, \leq)$, donde $A = \{0, 1\}$. El orden lexicográfico $(A \times A \times A, \preceq)$ está dado por:



# Ordenes lexicográficos

## Definición

Sea $(A, R)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $S$ un conjunto de cadenas sobre $A$. La relación de **orden lexicográfico sobre** $S$ (el orden en el diccionario), denotada $\preceq$, está definida por:

(continua en la próxima diapositiva)

# Ordenes lexicográficos

## Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1 a_2 \ldots a_m, b_1 b_2 \ldots b_n \in S$, donde $m$ y $n$ son enteros positivos,

# Ordenes lexicográficos

## Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1 a_2 \ldots a_m, b_1 b_2 \ldots b_n \in S$, donde $m$ y $n$ son enteros positivos,

(i) Si $m \leq n$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m$, entonces

$$a_1 a_2 \ldots a_m \preceq b_1 b_2 \ldots b_n.$$

# Ordenes lexicográficos

## Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1 a_2 \ldots a_m, b_1 b_2 \ldots b_n \in S$, donde $m$ y $n$ son enteros positivos,

(i) Si $m \leq n$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m$, entonces

$$a_1 a_2 \ldots a_m \preceq b_1 b_2 \ldots b_n.$$

(ii) Si para algún entero $k$ con $k \leq m$, $k \leq n$ y $k \geq 1$, $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y $a_k \neq b_k$ pero $a_k \, R \, b_k$ entonces

$$a_1 a_2 \ldots a_m \preceq b_1 b_2 \ldots b_n.$$

# Ordenes lexicográficos

## Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_n \in S$, donde $m$ y $n$ son enteros positivos,

(i) Si $m \leq n$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$a_1 a_2 \dots a_m \preceq b_1 b_2 \dots b_n.$$

(ii) Si para algún entero $k$ con $k \leq m$, $k \leq n$ y $k \geq 1$, $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, k-1$ y $a_k \neq b_k$ pero $a_k \, R \, b_k$ entonces

$$a_1 a_2 \dots a_m \preceq b_1 b_2 \dots b_n.$$

(iii) Si $\epsilon$ es la cadena nula y $s \in S$, entonces $\epsilon \preceq s$.

## Ejemplo 8.5.6

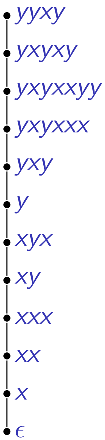
Algunas palabras ordenas de acuerdo al orden en el diccionario.

$$\begin{array}{ccc} x \preceq xx, & x \preceq y, & \epsilon \preceq \epsilon, \\ x \preceq xy, & xx \preceq xyx, & \epsilon \preceq x, \\ xx \preceq xxx, & xxxy \preceq xy, & \epsilon \preceq xy, \\ yxy \preceq yxyxxx, & yxyxxyy \preceq yxyxy, & \epsilon \preceq yyxy. \\ \text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \end{array}$$

(continua en la próxima diapositiva)

## Ejemplo 8.5.6 (continuación)

Diagrama de Hasse.



# Ordenes lexicográficos

### Teorema 8.5.1

Sea $(A, R)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $S$ un conjunto de cadenas sobre $A$. La relación de orden lexicográfico $\preceq$ sobre $S$ es un orden parcial, es decir, el conjunto $(S, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

# Tema

# Relaciones de orden total

## Definición

Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dos elementos $a, b \in A$ son **comparables**, si y solo si, $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

En caso contrario, los elementos $a$ y $b$ son **no comparables**.

# Relaciones de orden total

## Definición

Sea $R$ una relación de orden parcial sobre un conjunto $A$. La relación $R$ es una **relación de orden total sobre** $A$, si y solo si, todos los elementos de $A$ son comparables bajo $R$.

# Conjuntos totalmente ordenados

## Definición

Un conjunto $A$ es un **conjunto totalmente ordenado respecto a una relación** $\preceq$, si y solo si, la relación $\preceq$ es una relación de orden total sobre $A$.

# Conjuntos totalmente ordenados

## Ejemplo

Los siguientes conjuntos son conjuntos totalmente ordenados:

(i) $(\mathbf{R}, \leq)$.

(ii) $(A_1 \times \cdots \times A_n, \preceq)$, donde $\preceq$ es el orden lexicográfico.

(iii) Un conjunto de cadenas ordenadas lexicográficamente.

# Conjuntos totalmente ordenados

## Ejemplo

Los siguientes conjuntos parcialmente ordenados no son conjuntos totalmente ordenados:

(i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde $A$ es un conjunto.

(ii) $(\mathbf{Z}^+, |)$.

# Conjuntos totalmente ordenados

Teorema

Sean $(A_1, \preceq_1), \ldots, (A_n, \preceq_n)$ conjuntos totalmente ordenados. La relación de orden lexicográfico $\preceq$ sobre $A_1 \times \cdots \times A_n$ es una relación de orden total, es decir, el conjunto $(A_1 \times \cdots \times A_n, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado [Lipschutz y Lipson 2007].*

*Este teorema no está en el texto guía.

# Tema

# Elementos notables

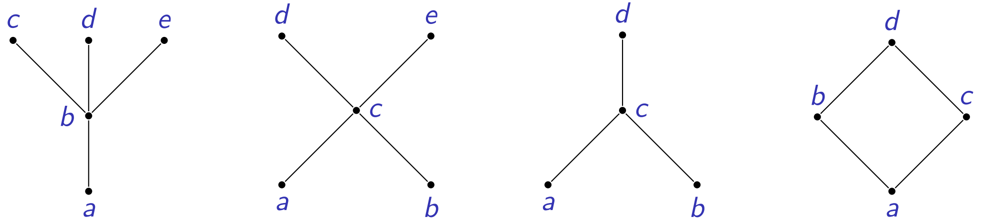
## Definición

Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $a \in A$. El elemento $a$ es un elemento **máximo/mayor/mínimo/menor** de $A$, si para todo $b \in A$,

$$\begin{array}{lcl} \text{máximo} & \Leftrightarrow & b \preceq a \;\text{ o }\; b \text{ y } a \text{ son no comparables}, \\ \text{mayor} & \Leftrightarrow & b \preceq a, \\ & & \\ \text{mínimo} & \Leftrightarrow & a \preceq b \;\text{ o }\; b \text{ y } a \text{ son no comparables}, \\ \text{menor} & \Leftrightarrow & a \preceq b. \end{array}$$

# Elementos notables

## Ejemplo




(i) (ii) (iii) (iv)

| Fig. | Máximos | Mayor | Mínimos | Menor |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $c, d, e$ | no hay | $a$ | $a$ |
| (ii) | $d, e$ | no hay | $a, b$ | no hay |
| (iii) | $d$ | $d$ | $a, b$ | no hay |
| (iv) | $d$ | $d$ | $a$ | $a$ |

# Elementos notables

## Algunas observaciones

(i) Un elemento mayor es un elemento máximo.

(ii) Un elemento máximo no necesariamente es un elemento mayor.

(iii) Un elemento menor es un elemento mínimo.

(iv) Un elemento mínimo no necesariamente es un elemento menor.

(v) Si un elemento mayor existe éste es único.

(vi) Si un elemento menor existe éste es único.

# Elementos notables

## Ejercicio 8.5.43

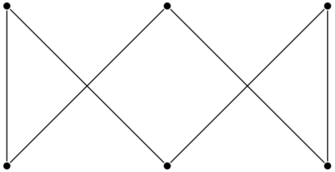
Dibuje un diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado que tiene tres elementos máximos y tres elementos mínimos y es tal que cada elemento es, ya sea mayor que o menor, que exactamente otros dos elementos.

# Elementos notables

## Ejercicio 8.5.43

Dibuje un diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado que tiene tres elementos máximos y tres elementos mínimos y es tal que cada elemento es, ya sea mayor que o menor, que exactamente otros dos elementos.

## Solución



# Tema

# Relaciones de orden parcial compatibles

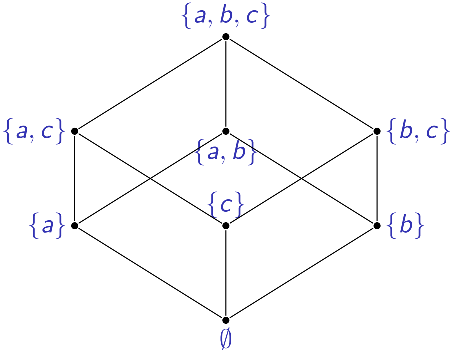
## Definición

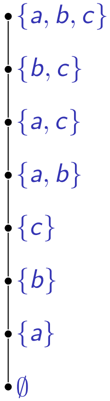
Sean $(A, \preceq)$ y $(A, \preceq')$ dos ordenes parciales. La relación $\preceq'$ es **compatible** con la relación $\preceq$, si y solo si, para todo $a$ y $b$ en $A$, si $a \preceq b$ entonces $a \preceq' b$.

# Relaciones de orden parcial compatibles

## Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c\}$ y sean los ordenes parciales $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A), \preceq)$, donde $\preceq$ es la relación de orden parcial indicada en el diagrama de Hasse de la derecha. El orden parcial $\preceq$ es compatible con el orden parcial $\subseteq$.



# Ordenamiento topológico

## Definición

Sean $(A, \preceq)$ y $(A, \preceq')$ dos ordenes parciales. La relación $\preceq'$ es un **ordenamiento topológico** para la relación $\preceq$, si y solo si, $\preceq'$ es un orden total que es compatible con $\preceq$.

# Ordenamiento topológico

## Ejemplo

En el ejemplo anterior, el orden total $\preceq$ es un ordenamiento topológico para el orden parcial $\subseteq$.

# Ordenamiento topológico

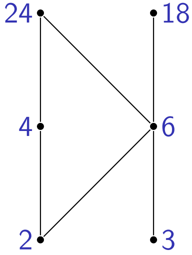
## Construcción de un ordenamiento topológico

Sea $(A, \preceq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado. Para construir un ordenamiento topológico $\preceq'$ para $\preceq$:

1. Elija cualquier elemento mínimo $x$ en $A$.
2. Sea $A' := A - \{x\}$.
3. Repita los siguiente pasos en tanto $A' \neq \emptyset$.
   3.1 Elija cualquier elemento mínimo $y$ en $A'$.
   3.2 Defina $x \preceq' y$.
   3.3 Sea $A' := A' - \{y\}$ y $x := y$.

## Ejemplo 8.5.11

Dado el conjunto parcialmente ordenado $(\{2,3,4,6,18,24\},|)$. Construir un ordenamiento topológico para el orden parcial $|$.




Solución: En el tablero.

# Tema

# Referencias


- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- Lipschutz, Seymour y Lipson, Marc Lars [1976] (2007). Schaum's Outline of Discrete Mathematics. 3.ª ed. McGraw-Hill (vid. págs. 34-37, 53).