CM0246 Estructuras Discretas
§ 6.3 Refutaciones y demostraciones algebraicas

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Refutaciones

El número de subconjuntos de un conjunto

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Referencias

Refutaciones

Observación

Recordar que para demostrar que un enunciado universal es falso, es suficiente con encontrar un contraejemplo.

Refutaciones

Observación

Recordar que para demostrar que un enunciado universal es falso, es suficiente con encontrar un contraejemplo.

Ejemplo

Refutar el siguiente enunciado: Para todos los conjuntos A, B y C se cumple

$$(A - B) \cup (B - C) = A - C.$$

Refutación

En el tablero.

Refutaciones

Observación

Un ejemplo diferente al anterior es el siguiente: demostrar o refutar el siguiente enunciado: Para todos los conjuntos A, B y C se cumple

$$(A - B) \cup (B - C) = A - C.$$

¿Cómo proceder?

Tema

El número de subconjuntos de un conjunto

Teorema 6.3.1

Sea $n \in \mathbf{N}$. Si un conjunto S tiene n elementos entonces, $\mathcal{P}(S)$ tiene 2^n elementos.

El número de subconjuntos de un conjunto

Demostración

En el tablero. Idea gráfica.*

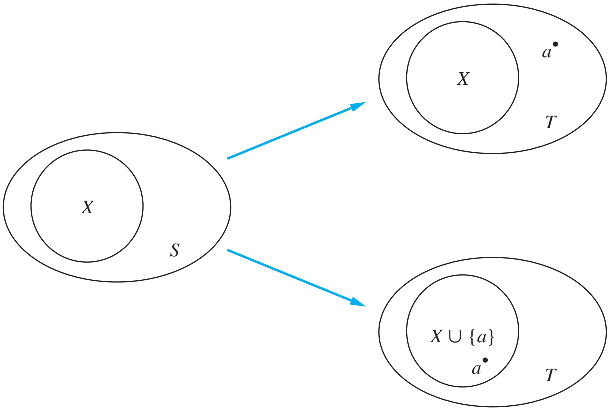

*Figura tomada de [Rosen 2012, pág. 323].

Tema

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Identidades básicas

Empleando las siguientes identidades se puede demostrar cualquier otra identidad que involucre solamente uniones, intersecciones, complementos y diferencias de conjuntos:

(continua en la próxima diapositiva)

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Identidades básicas (continuación)

Leyes conmutativas	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Leyes asociativas	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de identidad	$A \cap \mathbb{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$
Leyes de complemento	$A \cup A^{\mathrm{c}} = \mathbb{U}$ $A \cap A^{\mathrm{c}} = \emptyset$
Ley de diferencia de conjuntos	$A - B = A \cap B^{\mathrm{c}}$

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Lo algebraico de las demostraciones «algebraicas» de las identidades entre conjuntos

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal. Las identidades del Teorema 6.2.2 se cumplen para todos los elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$. Si los conjuntos con lo que trabajamos son subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ entonces podemos emplear las identidades bajo sustitución.

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Lo algebraico de las demostraciones «algebraicas» de las identidades entre conjuntos

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal. Las identidades del Teorema 6.2.2 se cumplen para todos los elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$. Si los conjuntos con lo que trabajamos son subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ entonces podemos emplear las identidades bajo sustitución.

Ejemplo

En el tablero.

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Ejemplo

Sean A y B conjuntos. Construir una demostración algebraica de la siguiente identidad:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathrm{c}}) = A.$$

Justificar cada paso de la demostración empleando una identidad del Teorema 6.2.2.

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Ejemplo

Sean A y B conjuntos. Construir una demostración algebraica de la siguiente identidad:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathrm{c}}) = A.$$

Justificar cada paso de la demostración empleando una identidad del Teorema 6.2.2.

Demostración

$$\begin{aligned}
\underline{(A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathrm{c}})} &= A \cap (\underline{B \cup B^{\mathrm{c}}}) && \text{(ley distributiva)} \\
&= \underline{A \cap \mathbb{U}} && \text{(ley de complemento)} \\
&= A && \text{(ley de identidad)}
\end{aligned}$$

■

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Una demostración diferente

$$
\begin{aligned}
\underline{(A \cap B) \cup (A \cap B^{c})} &= [\underline{(A \cap B) \cup A}] \cap [(A \cap B) \cup B^{c}] && \text{(ley distributiva)} \\
&= [\underline{A \cup (A \cap B)}] \cap [(A \cap B) \cup B^{c}] && \text{(ley conmutativa)} \\
&= A \cap [\underline{(A \cap B) \cup B^{c}}] && \text{(ley de absorción)} \\
&= A \cap [\underline{B^{c} \cup (A \cap B)}] && \text{(ley conmutativa)} \\
&= A \cap [(B^{c} \cup A) \cap (\underline{B^{c} \cup B})] && \text{(ley distributiva)} \\
&= A \cap [\underline{(B^{c} \cup A) \cap \mathbb{U}}] && \text{(ley de complemento)} \\
&= A \cap (\underline{B^{c} \cup A}) && \text{(ley de identidad)} \\
&= \underline{A \cap (A \cup B^{c})} && \text{(ley commutativa)} \\
&= A && \text{(ley de absorción)}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Ejemplo

Sean A y B conjuntos. Construir una demostración algebraica de la siguiente identidad:

$$(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A.$$

Justificar cada paso de la demostración empleando una identidad del Teorema 6.2.2.

Demostración

$$
\begin{aligned}
(\underline{B - A}) \cup (C - A) &= (B \cap A^{c}) \cup (\underline{C - A}) && \text{(ley de diferencia de conjuntos)} \\
&= (\underline{B \cap A^{c}}) \cup (C \cap A^{c}) && \text{(ley de diferencia de conjuntos)} \\
&= (A^{c} \cap B) \cup (\underline{C \cap A^{c}}) && \text{(ley conmutativa)} \\
&= \underline{(A^{c} \cap B) \cup (A^{c} \cap C)} && \text{(ley conmutativa)} \\
&= \underline{A^{c} \cap (B \cup C)} && \text{(ley distributiva)} \\
&= \underline{(B \cup C) \cap A^{c}} && \text{(ley conmutativa)} \\
&= (B \cup C) - A && \text{(ley de diferencia de conjuntos)}
\end{aligned}
$$

■

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Definición

Sean A y B conjuntos. La **diferencia simétrica** entre A y B, denotada por $A \triangle B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que bien están en A o bien están en B, pero no en ambos.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Definición

Sean A y B conjuntos. La **diferencia simétrica** entre A y B, denotada por $A \triangle B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que bien están en A o bien están en B, pero no en ambos.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4\}$. Entonces $A \triangle B = \{1, 2, 4\}$.

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Definición

Sean A y B conjuntos. La **diferencia simétrica** entre A y B, denotada por $A \triangle B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que bien están en A o bien están en B, pero no en ambos.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4\}$. Entonces $A \triangle B = \{1, 2, 4\}$.

Observación

Una definición equivalente de la diferente simétrica entre los conjuntos A y B es

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Ejemplo

Construir una demostración algebraica que para todos los conjuntos A y B, se cumple la siguiente identidad:

$$A \triangle A^{\mathrm{c}} = \mathbb{U}.$$

Justificar cada paso de la demostración empleando una identidad del Teorema 6.2.2.

Demostraciones «algebraicas» de identidades entre conjuntos

Demostración

$$
\begin{aligned}
\underline{A \bigtriangleup A^c} &= (\underline{A - A^c}) \cup (\underline{A^c - A}) && \text{(def. diferencia simétrica)} \\
&= (A \cap \underline{(A^c)^c}) \cup (A^c \cap A^c) && \text{(ley de diferencia de conjuntos, dos veces)} \\
&= (\underline{A \cap A}) \cup (\underline{A^c \cap A^c}) && \text{(ley de complemento doble)} \\
&= \underline{A \cup A^c} && \text{(ley de idempotencia, dos veces)} \\
&= \mathbb{U} && \text{(ley de complemento)}
\end{aligned}
$$

■

Tema

Referencias

- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- Rosen, Kenneth H. [1988] (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. 7.ª ed. McGraw-Hill (vid. pág. 10).