CM0246 Estructuras Discretas
§ 5.2 Inducción matemática

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Introducción

Motivación

Tratemos de encontrar una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares.

Introducción

Motivación

Tratemos de encontrar una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares.

Algunos cálculos:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1+3 &= 4, \\ 1+3+5 &= 9, \\ 1+3+5+7 &= 16, \\ 1+3+5+7+9 &= 25. \end{aligned}$$

Introducción

Motivación

Tratemos de encontrar una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares.

Algunos cálculos:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1, \\
1+3 &= 4, \\
1+3+5 &= 9, \\
1+3+5+7 &= 16, \\
1+3+5+7+9 &= 25.
\end{aligned}
$$

Parece que la suma de los n primeros números naturales impares es n^2. ¿Cómo podemos demostrar esta conjetura?

Introducción

Descripción

- La inducción matemática es un método de demostración.

Introducción

Descripción

- La inducción matemática es un método de demostración.
- La inducción matemática se emplea para demostrar que una propiedad $P(n)$, definida para números naturales n, es verdadera para todos los valores de n mayores o iguales a cierto número natural fijo.

Introducción

Descripción

- La inducción matemática es un método de demostración.
- La inducción matemática se emplea para demostrar que una propiedad $P(n)$, definida para números naturales n, es verdadera para todos los valores de n mayores o iguales a cierto número natural fijo.
- La inducción matemática está sustentada en el principio de inducción matemática.

Tema

Principio de inducción matemática (pág. 246)

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para números naturales n y sea a un número natural fijo. Supongamos que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

(i) $P(a)$ es verdadera.

(ii) Para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces, el enunciado

$$\text{para todo número natural } n \geq a,\ P(n)$$

es verdadero.

Principio de inducción matemática

Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.

Principio de inducción matemática

Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática empleando el conjunto de los números enteros $\mathbf{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ en su presentación.
- La propiedad (o predicado o función proposicional) $P(n)$ es definida para números naturales n.

Principio de inducción matemática

Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.
- La propiedad (o predicado o función proposicional) $P(n)$ es definida para números naturales n.
- El enunciado (o proposición) el cual se demuestra como verdadero es:

$$\text{para todo número natural } n \geq a, \ P(n).$$

Principio de inducción matemática

Observaciones (continuación)

- El principio requiere de dos hipótesis:

  (i) $P(a)$ es verdadera.

  (ii) Para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Principio de inducción matemática

Observaciones (continuación)

- El principio requiere de dos hipótesis:

  (i) $P(a)$ es verdadera.

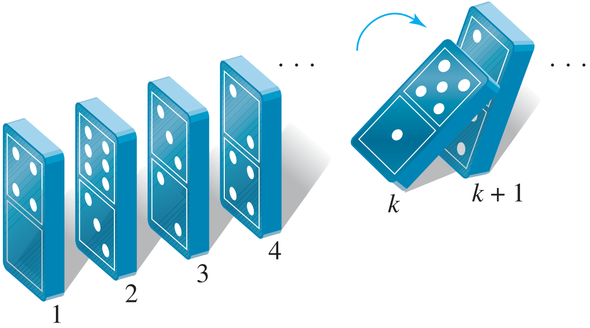
  (ii) Para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

- Observe que la segunda hipótesis tiene la forma de un enunciado condicional:

$$\text{para todo número natural } k \geq a,\ P(k) \to P(k+1).$$

Principio de inducción matemática

Representación gráfica (Figura 5.2.3)



Tema

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$ es verdadera.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$ es verdadera.
4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$ es verdadera.
4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Suponer que $P(k)$ es verdadera, para algún $k \geq a$.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$ es verdadera.
4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Suponer que $P(k)$ es verdadera, para algún $k \geq a$.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq a$.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$ es verdadera.
4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Suponer que $P(k)$ es verdadera, para algún $k \geq a$.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq a$.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq a$.

Método de demostración por inducción matemática

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$ es verdadera.
4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Suponer que $P(k)$ es verdadera, para algún $k \geq a$.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq a$.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq a$.
5. Concluir que el enunciado del paso 2 es verdadero por el principio de inducción matemática.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Ejemplo (Teorema 5.2.2, primera versión)

Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Ejemplo (Teorema 5.2.2, primera versión)

Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración por inducción matemática

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n

   La propiedad está dada por:

$$P(n)\colon 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.

   Vamos a demostrar que el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n \geq 1,\ P(n)$$

   es verdadero.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar el número natural fijo a.

   Vamos a demostrar que el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n \geq 1,\ P(n)$$

   es verdadero.

   Es decir, vamos a demostrar que

   $$\text{para todo número natural } n \geq 1,\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   es verdadero.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

3. Paso básico: Demostrar que $P(a)$ es verdadera

   Vamos a demostrar que $P(1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

3. Paso básico: Demostrar que $P(a)$ es verdadera

   Vamos a demostrar que $P(1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

   $$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

   Demostración.

   Dado que

   $$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

   entonces $P(1)$ es verdadera.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4. Paso inductivo: Demostrar que para todo número natural $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.1 Suponer la hipótesis inductiva: Suponer que $P(k)$ es verdadera, para algún $k \geq a$

Sea $k \geq 1$, suponemos que $P(k)$ es verdadera, es decir, suponemos que

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera

Sea $k \geq 1$, vamos a demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \text{(por hip. inductiva)} \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) && \text{(por álgebra)} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && \text{(por álgebra)} \end{aligned}$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hip. inductiva)} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && \text{(por álgebra)} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && \text{(por álgebra)}
\end{aligned}
$$

Observación

El texto guía realiza una demostración diferente trabajando a ambos lados de la igualdad.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (primera versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

5. Concluir que el enunciado del paso 2 es verdadero por el principio de inducción matemática

   Por lo tanto, el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n \geq 1,\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   es verdadero por el principio de inducción matemática. ■

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Ejemplo (Teorema 5.2.2, segunda versión)

Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Ejemplo (Teorema 5.2.2, segunda versión)

Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración por inducción matemática

1. Propiedad $P(n)$

   La propiedad está dada por:

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

2. Enunciado

   Vamos a demostrar que

   $$\text{para todo número natural } n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

   es verdadero.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

3. Paso básico

   Vamos a demostrar que $P(1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

3. Paso básico

   Vamos a demostrar que $P(1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

   $$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}.$$

   Demostración.

   Dado que $\frac{1(1+1)}{2} = 1 = \sum_{i=1}^{1} i$, entonces $P(1)$ es verdadera.

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4. Paso inductivo: Demostrar $P(k) \rightarrow P(k+1)$

4.1 Suponer la hipótesis inductiva $P(k)$

Sea $k \geq 1$, suponemos que $P(k)$ es verdadera, es decir, suponemos que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera

Sea $k \geq 1$, vamos a demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) && \text{(propiedad de la sumatoria)}\\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)}\\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) && \text{(por álgebra)}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && \text{(por álgebra)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Suma de los n primeros números naturales (segunda versión)

Demostración por inducción matemática (continuación)

5. Conclusión

   Por lo tanto, el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

   es verdadero por el principio de inducción matemática. ■

Ejercicio: Suma de los primeros n números naturales impares

Ejercicio

Demostrar que la suma de los n primeros números naturales impares es n^2.

Ejercicio: Suma de los primeros n números naturales impares

Ejercicio

Demostrar que la suma de los n primeros números naturales impares es n^2.

Sugerencia

Recordar que un número natural impar n se puede representar de dos maneras:

$$n = 2a + 1, \text{ con } a \in \mathbf{N},$$
$$n = 2b - 1, \text{ con } b \in \mathbf{Z}^+.$$

Ejercicio: Suma de los primeros n números naturales impares

Ejercicio

Demostrar que la suma de los n primeros números naturales impares es n^2.

Sugerencia

Recordar que un número natural impar n se puede representar de dos maneras:

$$n = 2a + 1, \text{ con } a \in \mathbf{N},$$
$$n = 2b - 1, \text{ con } b \in \mathbf{Z}^+.$$

Observación

No es absolutamente claro quién empleó el método de demostración por inducción la primera vez, pero D. Franciscus Maurolycus en 1575 demostró por inducción la propiedad señalada en el ejercicio [Gunderson 2011, § 1.8].

Ejemplo: Suma geométrica

Ejemplo (Teorema 5.2.3)

Demostrar que para cualquier número real $r \neq 1$ y para cualquier número natural n,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Ejemplo: Suma geométrica

Ejemplo (Teorema 5.2.3)

Demostrar que para cualquier número real $r \neq 1$ y para cualquier número natural n,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Demostración por inducción matemática

1. Sea $r \neq 1$ un número real. La propiedad está dada por:

$$P(n)\colon \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

2. Vamos a demostrar que

$$\text{para todo número real } r \neq 1 \text{ y para todo número natural } n, \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

es verdadero.

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

3. Paso básico. Vamos a demostrar que $P(0)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$\sum_{i=0}^{0} r^i = \frac{r^{0+1} - 1}{r - 1}.$$

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

3. Paso básico. Vamos a demostrar que $P(0)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$\sum_{i=0}^{0} r^i = \frac{r^{0+1}-1}{r-1}.$$

Demostración.

Si $r \neq 1$, entonces

$$\frac{r^{0+1}-1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1 = r^0 = \sum_{i=0}^{0} r^i.$$

Por lo tanto, $P(0)$ es verdadera.

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

4. Paso inductivo: Demostrar $P(k) \rightarrow P(k+1)$

4.1 Suponemos la hipótesis inductiva $P(k)$

Sea $k \geq 0$, suponemos que $P(k)$ es verdadera, es decir, suponemos que

$$\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}.$$

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.2 Sea $k \geq 0$, vamos a demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir, vamos a demostrar que

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}.$$

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \left(\sum_{i=0}^{k} r^i\right) + r^{k+1} && \text{(propiedad de la sumatoria)} \\
&= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{(r^{k+1}-1) + r^{k+1}(r-1)}{r-1} && \text{(por álgebra)} \\
&= \frac{r^{k+2}-1}{r-1} && \text{(por álgebra)}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Suma geométrica

Demostración por inducción matemática (continuación)

5. Conclusión

   Por lo tanto, el enunciado

   para todo número real $r \neq 1$ y para todo número natural n, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

   es verdadero por el principio de inducción matemática. ■

Ejercicio: Todos los caballos son del mismo color

Ejercicio (demostración inválida)

Encontrar el fallo en la siguiente «demostración» de que todos los caballos son del mismo color [Rosen 2004, § 3.3. Ejercicio 51]:

> *Sea $P(n)$ la proposición que todos los caballos en un conjunto de n caballos son del mismo color.*
>
> *Paso base: Claramente, $P(1)$ es verdadera.*
>
> *Paso inductivo: Supongamos que $P(k)$ es verdadera, por lo que todos los caballos en un conjunto de k caballos son del mismo color. Consideremos $k+1$ caballos enumerados como $1, 2, 3, \ldots, k, k+1$. Los primeros k caballos deben ser del mismo color y los últimos k caballos también. Como estos dos conjuntos de caballos se solapan, los $k+1$ caballos serán del mismo color. Esto demuestra que $P(k+1)$ es verdadera y completa la demostración por inducción.*

Tema

Inducción matemática: principio, axioma o teorema

Observación

No es claro por qué el «principio de inducción matemática» es llamado de esta forma. En algunas teorías este principio es un axioma, por ejemplo en la Teoría de Números; y en otras teorías este principio es una teorema, por ejemplo en la Teoría de Conjuntos.

Inducción matemática: principio, axioma o teorema

Giuseppe Peano
(1858 – 1932)

Axiomas de Peano para los números naturales*

P1. $0 \in \mathrm{N}$.

P2. Si $n \in \mathrm{N}$, entonces existe $n' \in \mathrm{N}$ (sucesor).

P3. Para cada $n \in \mathrm{N}$, $0 \neq n'$.

P4. Si $n' = m'$ entonces $n = m$.

P5. Axioma (esquema axiomático) de inducción

Sea $S \subseteq \mathrm{N}$ tal que

(i) $0 \in S$, y

(ii) para todo $n \in \mathrm{N}$, $n \in S \to n' \in S$,

entonces $S = \mathrm{N}$.

*Foto tomada de Wikipedia. Véase, por ejemplo, [Gunderson 2011; Peano 1967]. Para Peano el primer número natural era el 1. El axioma de inducción es de segundo orden.

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).

Gunderson, David S. (2011). Handbook of Mathematical Induction. Chapman & Hall (vid. págs. 49-51, 64).

Peano, Giuseppe [1889] (1967). The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method. En: From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. por van Heijenoort, Jean. Source Books in the History of the Sciences. Translation of «*Arithmetices principia, nova methodo exposita*» by the editor. Harvard University Press, págs. 83-97 (vid. pág. 64).

Rosen, Kenneth H. [1988] (2004). Matemática Discreta y sus Aplicaciones. Trad. por Pérez Morales, José Manuel, Moro Carreño, Julio, Lías Quintero, Ana Isabel y Ramos Alonc, Pedro Antonio. 5.ª ed. McGraw-Hill (vid. pág. 61).