CM0246 Estructuras Discretas
§ 5.4 Inducción matemática fuerte y el principio del buen orden

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Introducción

Descripción

- La inducción matemática fuerte es un método de demostración.

Introducción

Descripción

- La inducción matemática fuerte es un método de demostración.
- La inducción matemática fuerte está sustentada en el principio de inducción matemática fuerte.

Introducción

Descripción

- La inducción matemática fuerte es un método de demostración.
- La inducción matemática fuerte está sustentada en el principio de inducción matemática fuerte.
- A diferencia de la inducción matemática, en la inducción matemática fuerte «el paso básico puede contener demostraciones para varios valores iniciales y en el paso inductivo la veracidad del predicado $P(n)$ se supone no solo para un valor de n, sino para todos los valores k y después se demuestra la veracidad de $P(k+1)$.» [p. 268]

Tema

Principio de inducción matemática fuerte

Principio de inducción matemática (pág. 268)

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para números naturales n y sean a y b números naturales fijos con $a \leq b$. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

(i) Las propiedades $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(b)$ son verdaderas.

(ii) Para cualquier número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces, el enunciado

$$\text{para todo número natural } n \geq a,\ P(n)$$

es verdadero.

Principio de inducción matemática fuerte

Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática fuerte empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.

Principio de inducción matemática fuerte

Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática fuerte empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.
- Un enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática, si y solo si, el enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática fuerte.

Principio de inducción matemática fuerte

Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática fuerte empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.
- Un enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática, si y solo si, el enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática fuerte.
- Otros nombres para el principio de inducción matemática fuerte son: segundo principio de inducción y principio de inducción completa.

Tema

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar los números naturales a y b fijos tales que $a \leq b$.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales n.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar los números naturales a y b fijos tales que $a \leq b$.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(b)$ son verdaderas.

(continua en la próxima diapositiva)

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k.

   De forma equivalente, suponer que $P(a), P(a+1), \ldots, P(k)$ son verdaderas.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales i desde a hasta k.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

5. Concluir que el enunciado del paso 2 es verdadero por el principio de inducción matemática fuerte.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que 1 es divisible por un número primo.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que 1 es divisible por un número primo.

Demostración por inducción matemática fuerte

1. La propiedad $P(n)$ está dada por:

   $P(n)$: n es divisible por un número primo

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que 1 es divisible por un número primo.

Demostración por inducción matemática fuerte

1. La propiedad $P(n)$ está dada por:

   $P(n)$: n es divisible por un número primo

2. Vamos a demostrar que el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n > 1,\ P(n)$$

   es verdadero. Además, $a = b = 2$.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que 1 es divisible por un número primo.

Demostración por inducción matemática fuerte

1. La propiedad $P(n)$ está dada por:

   $P(n)$: n es divisible por un número primo

2. Vamos a demostrar que el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n > 1,\ P(n)$$

   es verdadero. Además, $a = b = 2$.

3. Paso básico:

   $P(2)$ es verdadera porque 2 es divisible por 2 y 2 es un número primo.

(continua en la próxima diapositiva)

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural i desde 2 hasta k, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural i desde 2 hasta k, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

    4.1 Hipótesis inductiva: Sea $k \geq 2$ un número natural. Supongamos que $P(i)$ para todo número natural i desde 2 hasta k. Es decir, supongamos que i es divisible por un número primo, para i desde 2 hasta k.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural i desde 2 hasta k, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

    4.1 Hipótesis inductiva: Sea $k \geq 2$ un número natural. Supongamos que $P(i)$ para todo número natural i desde 2 hasta k. Es decir, supongamos que i es divisible por un número primo, para i desde 2 hasta k.

    4.2 Sea $k \geq 2$, vamos a demostrar $P(k+1)$, es decir vamos a demostrar que $k+1$ es divisible por un número primo.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural i desde 2 hasta k, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

   4.1 Hipótesis inductiva: Sea $k \geq 2$ un número natural. Supongamos que $P(i)$ para todo número natural i desde 2 hasta k. Es decir, supongamos que i es divisible por un número primo, para i desde 2 hasta k.

   4.2 Sea $k \geq 2$, vamos a demostrar $P(k+1)$, es decir vamos a demostrar que $k+1$ es divisible por un número primo.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera

   En el tablero.

(continua en la próxima diapositiva)

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

5. Por lo tanto, el enunciado

   para todo número natural $n > 1$, n es divisible por un número primo

   es verdadero por el principio de inducción matemática fuerte. ∎

Sucesiones infinitas

Definición

Una **sucesión infinita** es una función del conjunto de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ (o del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$) a un conjunto A.*

Notación

Una sucesión infinita $\mathbf{Z}^+ \to A$ es denotada por

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{o} \quad \{a_n : n \in \mathbf{Z}^+\} \quad \text{o} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}.$$

y una sucesión infinita $\mathbf{N} \to A$ es denotada por

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \quad \text{o} \quad \{a_n : n \in \mathbf{N}\} \quad \text{o} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

*El texto en la sección § 5.1 presenta una definición general de sucesión que incluye las sucesiones infinitas.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.2 (una propiedad de una sucesión)

Sea $s_0, s_1, s_2, \ldots$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ s_1 &= 4, \\ s_k &= 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \text{ para todo número natural } k \geq 2. \end{aligned}$$

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.2 (una propiedad de una sucesión)

Sea $s_0, s_1, s_2, \ldots$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ s_1 &= 4, \\ s_k &= 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \text{ para todo número natural } k \geq 2. \end{aligned}$$

Demostrar que para todo número natural n,

$$s_n = 5^n - 1.$$

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.2 (una propiedad de una sucesión)

Sea $s_0, s_1, s_2, \ldots$ la sucesión definida recursivamente por

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 0, \\
s_1 &= 4, \\
s_k &= 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \text{ para todo número natural } k \geq 2.
\end{aligned}
$$

Demostrar que para todo número natural n,

$$s_n = 5^n - 1.$$

Demostración por inducción matemática fuerte

En el tablero.

Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejercicio

Demostrar por inducción matemática fuerte que para todo número natural $n \geq 1$, el número

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

es impar.

Tema

El principio del buen orden

Principio del buen orden para los números naturales

Sea S un subcojunto del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ diferente de vacío. Entonces S tiene un mínimo elemento.

El principio del buen orden

Principio del buen orden para los números naturales

Sea S un subcojunto del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ diferente de vacío. Entonces S tiene un mínimo elemento.

Principio del buen orden para los números enteros

«Sea S un conjunto de números enteros que contiene uno o más números enteros todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces S tiene un mínimo elemento.» [p. 275]

El principio del buen orden

Principio del buen orden para los números naturales

Sea S un subcojunto del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ diferente de vacío. Entonces S tiene un mínimo elemento.

Principio del buen orden para los números enteros

«Sea S un conjunto de números enteros que contiene uno o más números enteros todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces S tiene un mínimo elemento.» [p. 275]

Observación

El texto guía no presenta el principio del buen orden para los números naturales.

El principio del buen orden

Ejemplo

Demostrar que cualquier sucesión estrictamente decreciente de números naturales es finita.

El principio del buen orden

Ejemplo

Demostrar que cualquier sucesión estrictamente decreciente de números naturales es finita.

Demostración

Sea $r_1, r_2, r_3, \ldots$ una sucesión de números naturales tal que $r_i > r_{i+1}$ para todo i.

El principio del buen orden

Ejemplo

Demostrar que cualquier sucesión estrictamente decreciente de números naturales es finita.

Demostración

Sea $r_1, r_2, r_3, \ldots$ una sucesión de números naturales tal que $r_i > r_{i+1}$ para todo i.

Por el principio del buen orden para los números naturales, sea r_k el elemento mínimo de la sucesión. Entonces r_k es el último término de la sucesión. De lo contrario, existe r_{k+1} tal que $r_k > r_{k+1}$ lo cual es una contradicción porque r_k es el elemento mínimo. ■

El principio del buen orden

Teorema

Los siguientes principios son equivalentes:

(i) Principio de inducción matemática

(ii) Principio de inducción matemática fuerte

(iii) Principio del buen orden para los números naturales

Tema

Agradecimientos

Agradezco a mi colega René Alejandro Londoño Cano por señalarme algunas correcciones a una versión anterior de estas diapositivas.

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).