CM0246 Estructuras Discretas
§ 5.9 Definiciones generales recursivas e inducción estructural

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Introducción

Descripción

- La relación entre la inducción matemática (ordinaria o fuerte) y las definiciones recursivas se observó en un ejemplo anterior: Definimos una sucesión por recursión y probamos una propiedad de esta sucesión por inducción matemática.

Introducción

Descripción

- La relación entre la inducción matemática (ordinaria o fuerte) y las definiciones recursivas se observó en un ejemplo anterior: Definimos una sucesión por recursión y probamos una propiedad de esta sucesión por inducción matemática.
- En esta sección vamos a generalizar el ejemplo anterior empleando:
  - Definiciones recursivas de conjuntos y funciones.
  - Definiciones recursivas de funciones sobre conjuntos numéricos.
  - Demostraciones por inducción estructural de propiedades de conjuntos definidos recursivamente.

Introducción

Observación

En algunas áreas de las matemáticas y las ciencias de la computación, los conjuntos definidos recursivamente también son llamados conjuntos definidos inductivamente.

Tema

Conjuntos definidos recursivamente

Definición

Una **definición recursiva de un conjunto** está compuesta de los siguiente pasos:

Conjuntos definidos recursivamente

Definición

Una **definición recursiva de un conjunto** está compuesta de los siguiente pasos:

(i) Base: Un enunciado de que ciertos elementos pertenecen al conjunto.

Conjuntos definidos recursivamente

Definición

Una **definición recursiva de un conjunto** está compuesta de los siguiente pasos:

(i) Base: Un enunciado de que ciertos elementos pertenecen al conjunto.

(ii) Recursión: Un conjunto de reglas que indican cómo formar nuevos elementos de un conjunto a partir de los que ya se sabe que están en el conjunto.

Conjuntos definidos recursivamente

Definición

Una **definición recursiva de un conjunto** está compuesta de los siguiente pasos:

(i) Base: Un enunciado de que ciertos elementos pertenecen al conjunto.

(ii) Recursión: Un conjunto de reglas que indican cómo formar nuevos elementos de un conjunto a partir de los que ya se sabe que están en el conjunto.

(iii) Restricción: Un enunciado que indica que no hay elementos que pertenezcan al conjunto distintos a los que provienen de (i) y (ii).

Conjuntos definidos recursivamente

Ejemplo (números naturales)

El conjunto de los números naturales Nat es el conjunto definido recursivamente canónico.

(i) Base: $0 \in \mathrm{Nat}$.

(ii) Recursión: Si $n \in \mathrm{Nat}$ entonces $n' \in \mathrm{Nat}$.

(iii) Restricción: No hay elementos en el conjunto Nat distintos a los obtenidos de (i) y (ii).

Conjuntos definidos recursivamente

Ejemplo (números naturales)

El conjunto de los números naturales Nat es el conjunto definido recursivamente canónico.

(i) Base: $0 \in \mathrm{Nat}$.

(ii) Recursión: Si $n \in \mathrm{Nat}$ entonces $n' \in \mathrm{Nat}$.

(iii) Restricción: No hay elementos en el conjunto Nat distintos a los obtenidos de (i) y (ii).

De acuerdo a la definición anterior, el conjunto Nat está formado por:

$$\mathrm{Nat} = \{0, 0', 0'', 0''', \dots\}.$$

Conjuntos definidos recursivamente

Ejercicio

¿Es posible definir recursivamente el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$? En caso afirmativo, presentar la definición. En caso negativo, justificar su respuesta.

Conjuntos definidos recursivamente

Ejemplo (paréntesis balanceados)

En las expresiones matemáticas los paréntesis balanceados (*p. ej.* (())() y ()()()) son válidos y los paréntesis no balanceados (*p. ej.*)())) y ()))((() son inválidos.

Conjuntos definidos recursivamente

Ejemplo (paréntesis balanceados)

En las expresiones matemáticas los paréntesis balanceados (*p. ej.* $(())()$ y $()()())$ son válidos y los paréntesis no balanceados (*p. ej.* $)()))$ y $()))((($) son inválidos.

El conjunto de los paréntesis balanceados PB es definido recursivamente por:

(i) Base: $() \in \mathrm{PB}$.

(ii) Recursión:

a) Si $E \in \mathrm{PB}$ entonces $(E) \in \mathrm{PB}$.

b) Si $E, F \in \mathrm{PB}$ entonces $EF \in \mathrm{PB}$.

(iii) Restricción: No hay elementos en PB distintos a los obtenidos de (i) y (ii).

Conjuntos definidos recursivamente

Ejemplo

Demostrar que $(())() \in \mathrm{PB}$.

Demostración

En el tablero.

Conjuntos definidos recursivamente

Definición

Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto finito. Una **cadena sobre** S es una sucesión finita de elementos de S.

Los elementos de S son los **caracteres** de la cadena.

La **cadena nula sobre** S es la cadena sin caracteres y se denota por ϵ.

Conjuntos definidos recursivamente

Definición

Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto finito. Una **cadena sobre** S es una sucesión finita de elementos de S.

Los elementos de S son los **caracteres** de la cadena.

La **cadena nula sobre** S es la cadena sin caracteres y se denota por ϵ.

Ejemplo

Las cadenas binarias son las cadenas sobre $S = \{0, 1\}$.

$$\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots\}.$$

Conjuntos definidos recursivamente

Ejemplo (cadenas binarias)

Sea $S = \{0, 1\}$. El conjunto de las cadenas sobre S, denotado S^*, es un conjunto definido recursivamente.

(i) Base: $\epsilon \in S^*$.

(ii) Recursión: Si $s \in S^*$ entonces

  a) $s0 \in S^*$,

  b) $s1 \in S^*$,

  donde $s0$ y $s1$ son las concatenaciones de s con 0 y 1, respectivamente.

(iii) Restricción: No hay elementos en S^* distintos a los obtenidos de (i) y (ii).

Tema

Inducción estructural

Descripción

La inducción estructural es un método para demostrar que todos los elementos de un conjunto definido recursivamente satisfacen una cierta propiedad.

Inducción estructural

Inducción estructural para los conjuntos definidos recursivamente

Sea S un conjunto definido recursivamente y sea P una propiedad sobre S. Para demostrar que todos los elementos en S satisfacen la propiedad P:

(i) Demostrar que cada elemento en la base para S satisface la propiedad P.

(ii) Demostrar que para cada regla en la recursión para S, si la regla se aplica a elementos en S que satisfacen la propiedad P, entonces, los elementos definidos por la regla también satisfacen la propiedad P.

Inducción estructural

Ejemplo

Sea PB el conjunto de los paréntesis bien balanceados. Demostrar que todos los elementos de PB contienen un número igual de paréntesis izquierdo y derecho.

Demostración por inducción estructural

En el tablero.

Inducción estructural

Ejemplo (Ejercicio 5.9.5)

Sea S un conjunto definido de forma recursiva como sigue:

i) Base: $1 \in S$

ii) Recursión: Si $s \in S$ entonces,

   a) $0s \in S$.

   b) $1s \in S$.

iii) Restricción: No hay nada en el conjunto S que no sean objetos definidos en i y ii.

Usar inducción estructural para demostrar que cada cadena en el conjunto S termina en 1.

Inducción estructural

Ejemplo (Ejercicio 5.9.5)

Sea S un conjunto definido de forma recursiva como sigue:

i) Base: $1 \in S$

ii) Recursión: Si $s \in S$ entonces,

  a) $0s \in S$.

  b) $1s \in S$.

iii) Restricción: No hay nada en el conjunto S que no sean objetos definidos en i y ii.

Usar inducción estructural para demostrar que cada cadena en el conjunto S termina en 1.

Demostración por inducción estructural

En el tablero.

Tema

Funciones definidas recursivamente

Definición

«Se dice que una función está **definida recursivamente** o es una **función recursiva** si su regla de definición se refiere a sí misma.» [pág. 332]

Funciones definidas recursivamente

Definición

«Se dice que una función está **definida recursivamente** o es una **función recursiva** si su regla de definición se refiere a sí misma.» [pág. 332]

Observación

Determinar que una función recursiva particular está bien definida puede ser muy difícil. De hecho, el problema general es un problema indecidible.

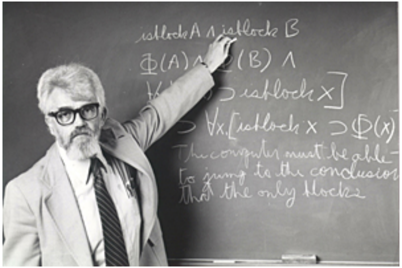
Funciones definidas recursivamente

Ejemplo (función $\mathrm{M91}$ de McCarthy)

La siguiente función fue definida por McCarthy:

$$\mathrm{M} : \mathbf{Z}^{+} \to \mathbf{Z}$$

$$\mathrm{M}(n) = \begin{cases} n - 10, & \text{si } n > 100; \\ \mathrm{M}(\mathrm{M}(n+11)), & \text{si } n \leq 100. \end{cases}$$



John McCarthy*
(1927 – 2011)

(continua en la próxima diapositiva)

*Foto cortesía de John McCarthy.

Ejemplo (continuación)

Calcular $\mathrm{M}(99)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(99) &= \mathrm{M}(\mathrm{M}(110)) \\
&= \mathrm{M}(100) \\
&= \mathrm{M}(\mathrm{M}(111)) \\
&= \mathrm{M}(101) \\
&= 91.
\end{aligned}$$

Funciones definidas recursivamente

Ejemplo (continuación)

Calcular $\mathrm{M}(99)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(99) &= \mathrm{M}(\mathrm{M}(110)) \\ &= \mathrm{M}(100) \\ &= \mathrm{M}(\mathrm{M}(111)) \\ &= \mathrm{M}(101) \\ &= 91. \end{aligned}$$

Observación

Se puede demostrar que $\mathrm{M}(n) = 91$, para todos los enteros positivos menores o iguales a 101.

Funciones definidas recursivamente

Ejemplo (función de Ackermann)

La función de Ackermann, simplificada por Péter, está definida por tres ecuaciones excluyentes:

$$\mathrm{A} : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

$$\mathrm{A}(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } m = 0; \\ \mathrm{A}(m-1, 1), & \text{si } m \neq 0 \text{ y } n = 0; \\ \mathrm{A}(m-1, \mathrm{A}(m, n-1)), & \text{si } m \neq 0 \text{ y } n \neq 0. \end{cases}$$

Wilhelm Ackermann
(1896 – 1962)

Rózsa Péter*
(1905 – 1977)

(continua en la próxima diapositiva)

*Imágenes tomadas de MacTutor.

Funciones definidas recursivamente

Ejemplo (continuación)

Calcular $A(1,2)$.

$$\begin{aligned} A(1,2) &= A(0, A(1,1)) \\ &= A(0, A(0, A(1,0))) \\ &= A(0, A(0, A(0,1))) \\ &= A(0, A(0,2)) \\ &= A(0,3) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Funciones definidas recursivamente

Ejemplo (continuación)

Calcular $\mathrm{A}(1,2)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(1,2) &= \mathrm{A}(0,\mathrm{A}(1,1)) \\
&= \mathrm{A}(0,\mathrm{A}(0,\mathrm{A}(1,0))) \\
&= \mathrm{A}(0,\mathrm{A}(0,\mathrm{A}(0,1))) \\
&= \mathrm{A}(0,\mathrm{A}(0,2)) \\
&= \mathrm{A}(0,3) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Observación

Se puede demostrar que la función de Ackermann está bien definida.

Funciones definidas recursivamente

Ejemplo («función» recursiva mal definida)

La «función»

$$G : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{N}$$

$$G(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es } 1; \\ 1 + G(n/2), & \text{si } n \text{ es par}; \\ G(3n-1), & \text{si } n \text{ es impar y } n > 1; \end{cases}$$

está mal definida porque el valor de $G(5)$ no está definido:

(continua en la próxima diapositiva)

Funciones definidas recursivamente

Ejemplo (continuación)

$$\begin{aligned} G(5) &= G(14) \\ &= 1 + G(7) \\ &= 1 + G(20) \\ &= 2 + G(10) \\ &= 3 + G(5), \end{aligned}$$

pero si $G(5) = 3 + G(5)$ entonces $0 = 3$, lo cual es una contradicción.

Funciones definidas recursivamente

Ejercicio

El estudiante A dice que puede definir una función $F : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ por la regla

$$F\left(\frac{m}{n}\right) = m - n.$$

El estudiante B dice que la función F no está bien definida. ¿Cuál estudiante tiene la razón? Justificar su respuesta.

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).