CM0246 Estructuras Discretas
§ 10.1 Grafos: definiciones y propiedades básicas

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

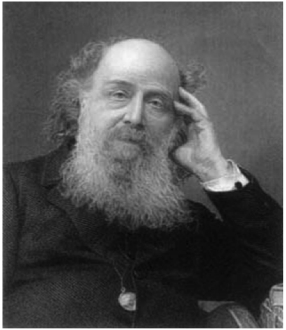
Comentarios históricos

Acerca del término «grafo»

Sylvester [1878] introdujo el término «grafo» en una nota en *Nature* acerca de Matemáticas y Química [Biggs, Lloyd y Wilson 1998].

En relación a este término, Biggs, Lloyd y Wilson escribieron (pág. 65):

«*So the credit (or blame) for the use of this term must be ascribed to Sylvester.*»



James Joseph Sylvester (1814–1897)*

*Imagen tomada del *MacTutor History of Mathematics Archive*.

Comentarios históricos

Primeras definiciones de grafos

König [1916, pág. 453]:

> *«Es sei eine endliche Anzahl yon Punkten gegeben; gewisse Paare, die man aus diesen Punkten auswiihlen kann, sollen durch eine oder mehrere (endlich viele) Kanten verbunden werden. Eine auf diese Weise entstehende Figur wird im allgemeinen als ein Graph bezeichne.»*

Translation [Biggs, Lloyd y Wilson 1998, pág. 203]:

> *«Let a finite number of points be given: then one can choose certain pairs of the points so that one or more (but finitely many) edges join them. A figure constructed in this way we shall generally call a graph.»*

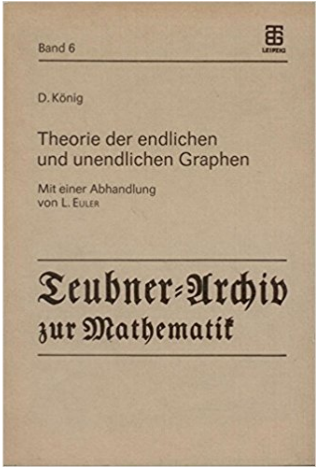
Comentarios históricos

Primeras definiciones de grafos

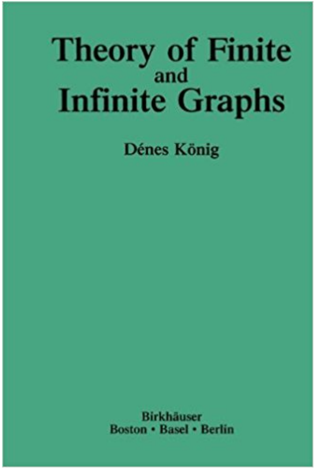
Whitney [1931, pág. 378]:

> *«Let a finite number of curves, or edges, whose end-points we call vertices, intersect at no other points than these vertices. Let the system be connected, that is, any two vertices are joined by a succession of edges, each two successive edges having a vertex in common. This forms a graph.»*

Comentarios históricos

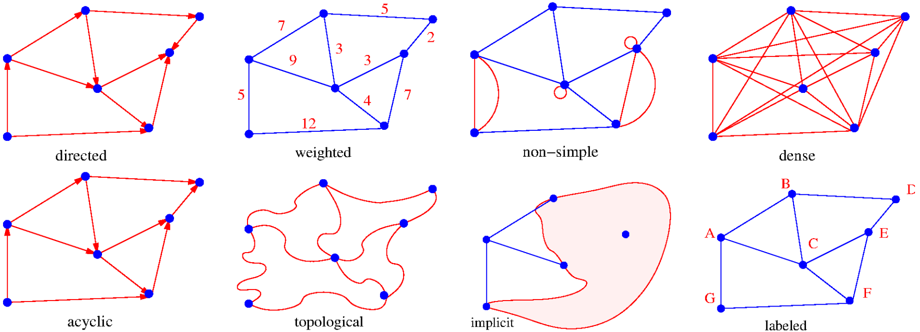


El primer libro en teoría de grafos fue escrito en alemán por König en 1936 y traducido al inglés en 1990.



Clasificación de grafos

Debido a las múltiples características y aplicaciones de los grafos, no es extraño que los grafos se pueden clasificar desde diferentes puntos de vista.*



directed — weighted — non−simple — dense

acyclic — topological — implicit — labeled

*Figura 7.2 de [Skiena 2020].

Tema

Definiciones básicas

Observación

Desafortunadamente la terminología empleada en la Teoría de Grafos no es estándar. Por esta razón siempre es necesario tener presente con cuales definiciones se está trabajando.

Definiciones básicas

Definiciones básicas (pág. 626)

«Un **grafo** G consiste de dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices** y un conjunto de **aristas** $E(G)$, donde cada arista está asociada a un conjunto compuesto por uno o dos vértices llamados **puntos extremos**. La correspondencia de aristas a puntos finales se llama la **función de arista a punto extremo**.»

Definiciones básicas

Definiciones básicas (pág. 626)

«Un **grafo** G consiste de dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices** y un conjunto de **aristas** $E(G)$, donde cada arista está asociada a un conjunto compuesto por uno o dos vértices llamados **puntos extremos**. La correspondencia de aristas a puntos finales se llama la **función de arista a punto extremo**.»

«Una arista con un solo punto extremo se llama un **bucle** y dos o más aristas distintas con el mismo conjunto de puntos extremos se dicen que son **paralelas**. Se dice que una arista **conecta** sus puntos finales; dos vértices que se conectan por una arista se denominan **adyacentes**; y un vértice que es un punto final de un bucle se dice que es **adyacente a sí mismo**.»

Definiciones básicas

Definiciones básicas (pág. 626)

«Un **grafo** G consiste de dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices** y un conjunto de **aristas** $E(G)$, donde cada arista está asociada a un conjunto compuesto por uno o dos vértices llamados **puntos extremos**. La correspondencia de aristas a puntos finales se llama la **función de arista a punto extremo**.»

«Una arista con un solo punto extremo se llama un **bucle** y dos o más aristas distintas con el mismo conjunto de puntos extremos se dicen que son **paralelas**. Se dice que una arista **conecta** sus puntos finales; dos vértices que se conectan por una arista se denominan **adyacentes**; y un vértice que es un punto final de un bucle se dice que es **adyacente a sí mismo**.»

«Se dice que una arista **incide sobre** cada uno de sus puntos extremos y dos aristas que inciden en el mismo punto se llaman **adyacentes**. Un vértice en el que no incide arista alguna se llama **aislado**.»

Definiciones básicas

Ejemplo

Definimos un grafo G, donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ y la función f es su función de aristas a puntos extremos.

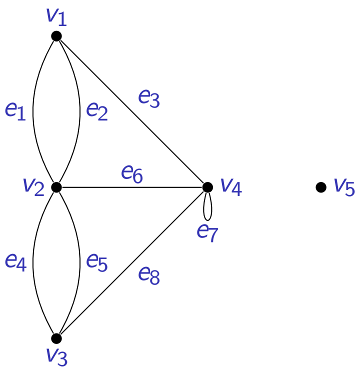
$$
\begin{aligned}
f : E(G) &\to \mathcal{P}(V(G)) \\
f(e_1) = f(e_2) &= \{v_1, v_2\}, \\
f(e_3) &= \{v_1, v_4\}, \\
f(e_4) = f(e_5) &= \{v_2, v_3\}, \\
f(e_6) &= \{v_2, v_4\}, \\
f(e_7) &= \{v_4\}, \\
f(e_8) &= \{v_4, v_3\}.
\end{aligned}
$$

Definiciones básicas

Ejemplo

Definimos un grafo G, donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ y la función f es su función de aristas a puntos extremos.

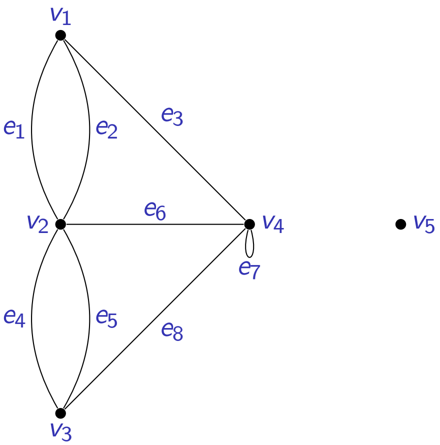
$$
\begin{aligned}
f : E(G) &\to \mathcal{P}(V(G)) \\
f(e_1) = f(e_2) &= \{v_1, v_2\}, \\
f(e_3) &= \{v_1, v_4\}, \\
f(e_4) = f(e_5) &= \{v_2, v_3\}, \\
f(e_6) &= \{v_2, v_4\}, \\
f(e_7) &= \{v_4\}, \\
f(e_8) &= \{v_4, v_3\}.
\end{aligned}
$$



(continua en la próxima diapositiva)

Definiciones básicas

Ejemplo (continuación)



- La arista e_7 es un bucle.
- Las aristas e_1 y e_2 son paralelas.
- Los vértices v_1 y v_4 son adyacentes.
- El vértice v_4 es adyacente a sí mismo.
- Las aristas e_6 y e_8 son adyacentes.
- El vértice v_5 es un vértice aislado.

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(iii) ¿Una arista puede tener solo un punto extremo?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(iii) ¿Una arista puede tener solo un punto extremo?

(iv) ¿La función de aristas a punto extremos es una correspondencia uno a uno?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(iii) ¿Una arista puede tener solo un punto extremo?

(iv) ¿La función de aristas a punto extremos es una correspondencia uno a uno?

(v) ¿Pueden cinco aristas ser paralelas?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(iii) ¿Una arista puede tener solo un punto extremo?

(iv) ¿La función de aristas a punto extremos es una correspondencia uno a uno?

(v) ¿Pueden cinco aristas ser paralelas?

(vi) ¿Puede una arista conectar tres vértices?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(iii) ¿Una arista puede tener solo un punto extremo?

(iv) ¿La función de aristas a punto extremos es una correspondencia uno a uno?

(v) ¿Pueden cinco aristas ser paralelas?

(vi) ¿Puede una arista conectar tres vértices?

(vii) ¿Puede un vértice ser adyacente a sí mismo?

Definiciones básicas

Algunas preguntas a partir de la definiciones básicas

(i) ¿El conjunto de vértices $V(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(ii) ¿El conjunto de aristas $E(G)$ puede ser infinito? ¿Puede ser vacío?

(iii) ¿Una arista puede tener solo un punto extremo?

(iv) ¿La función de aristas a punto extremos es una correspondencia uno a uno?

(v) ¿Pueden cinco aristas ser paralelas?

(vi) ¿Puede una arista conectar tres vértices?

(vii) ¿Puede un vértice ser adyacente a sí mismo?

(viii) ¿Puede un vértice tener más de un bucle?

Ejemplo

La siguiente figura representa un grafo, dos grafos, . . . , u ocho grafos?*

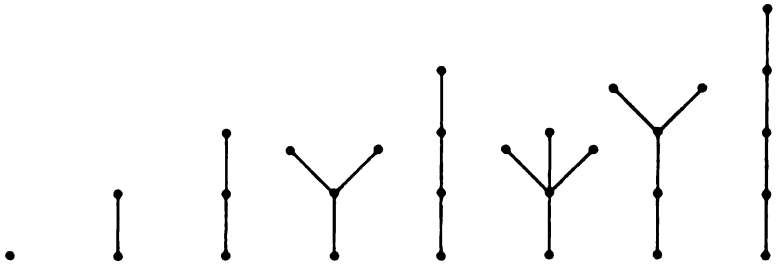


*Figura 3.1 de [Biggs, Lloyd y Wilson 1998].

Tema

Grafos dirigidos

Definición (pág. 629)

«Un **grafo dirigido** o **digráfica**, consiste en dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices y un conjunto de aristas dirigidas $D(G)$, donde cada una está asociada con un par ordenado de vértices llamado sus **puntos extremos**. Si la arista e está asociada con el par de vértices (v, w), entonces se dice que e es la arista (dirigida) de v a w.»

Grafos dirigidos

Definición (pág. 629)

«Un **grafo dirigido** o **digráfica**, consiste en dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices y un conjunto de aristas dirigidas $D(G)$, donde cada una está asociada con un par ordenado de vértices llamado sus **puntos extremos**. Si la arista e está asociada con el par de vértices (v, w), entonces se dice que e es la arista (dirigida) de v a w.»

Observación

Note que en un grafo no dirigido cada arista está asociada con un conjunto de vértices pero en un grafo dirigido cada arista dirigida está asociada con un par ordenado de vértices.

Tema

Grafos simples

Definición

Un **grafo simple** es un grafo que no tiene ni bucles ni aristas paralelas.

Notación

En un grafo simple una arista con puntos extremos v y w se denota por $\{v, w\}$.

Grafos simples

Definición

Un **grafo simple** es un grafo que no tiene ni bucles ni aristas paralelas.

Notación

En un grafo simple una arista con puntos extremos v y w se denota por $\{v, w\}$.

Ejemplo

Véase `https://mathworld.wolfram.com/SimpleGraph.html`.

Grafos completos

Definición

Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Un **grafo completo de n vértices**, denotado K_n, es un grafo simple con n vértices y una arista conectando a cada par de vértices distintos.

Grafos completos

Definición

Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Un **grafo completo de n vértices**, denotado K_n, es un grafo simple con n vértices y una arista conectando a cada par de vértices distintos.

Ejemplo

Véase `https://mathworld.wolfram.com/CompleteGraph.html`.

Grafos bipartitos

Definición (Sección 10.1, Ejercicio 37)

Un grafo **bipartito** G es un grafo grafo simple cuyo conjunto de vértices puede dividirse en dos subconjuntos no vacíos y disjuntos V_1 y V_2 que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) los vértices en V_1 se pueden conectar con los vértices en V_2,

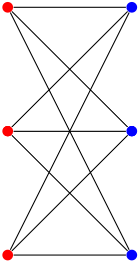
(ii) ningún vértice en V_1 está conectado con otros vértices en V_1 y

(iii) ningún vértice en V_2 está conectado con otros vértices en V_2.

Grafos bipartitos

Ejemplo

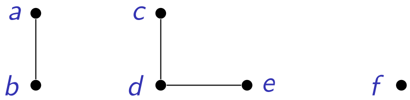
Grafo bipartito.



Grafos bipartitos

Ejemplo

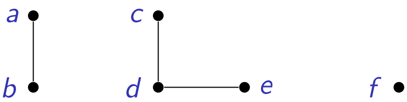
¿Es el grafo de la figura un grafo bipartito?



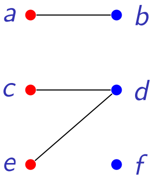
Grafos bipartitos

Ejemplo

¿Es el grafo de la figura un grafo bipartito?



¡Si!



Grafos bipartitos completos

Definición (pág. 633)

*Sean m y n enteros positivos. Un **grafo bipartito completo de vértices** (m, n), que se denota por $K_{m,n}$, es un grafo simple con vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ que satisface las siguientes propiedades:*

Para todos $i, k = 1, 2, \ldots, m$ y para todos $j, l = 1, 2, \ldots, n$,

(i) *hay una arista de cada vértice v_i, a cada vértice w_j,*

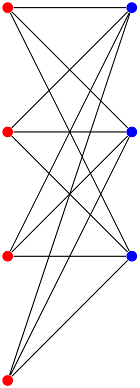
(ii) *no hay arista de cualquier vértice v_i a cualquier otro vértice v_k y*

(iii) *no hay arista de cualquier vértice w_j a cualquier otro vértice w_l.*

Grafos bipartitos completos

Ejemplo

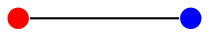
Grafo completo bipartito $K_{4,3}$.



Grafos bipartitos completos

Ejemplo

Grafo completo bipartito $K_{1,1}$.



Subgrafos

Definición

Sean G y H dos grafos. El grafo H es un **subgrafo** del grafo G, si y solo si,

(i) $V(H) \subseteq V(G)$,

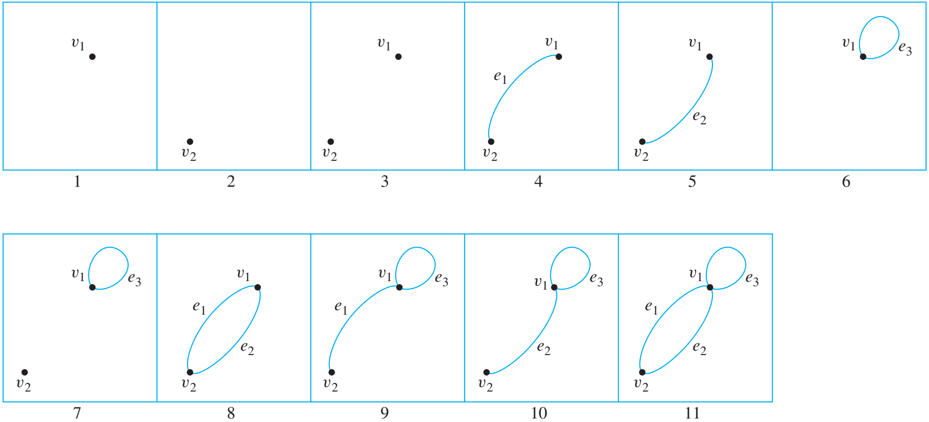
(ii) $E(H) \subseteq E(G)$ y

(iii) cada arista en H tiene los mismos puntos extremos que en G.

Subgrafos

Ejemplo

Todos los subgrafos del grafo 11 (Figura 10.1.4).



Subgrafos

Pregunta

¿Es necesaria la condición (iii) en la definición de subgrafo?

Subgrafos

Pregunta

¿Es necesaria la condición (iii) en la definición de subgrafo?

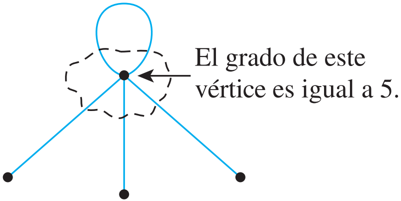
Sí. Sin esta condición, la función de aristas a puntos extremos $E(H) \to \mathcal{P}(V(H))$ podría no ser un subconjunto de la función de aristas a puntos extremos $E(G) \to \mathcal{P}(V(G))$.

Tema

Grado de un vértice

Definición

Sea G un grafo y sea v un vértice de G. El **grado de** v, denotado $\deg(v)$, es el número de aristas que inciden en v. Si la arista es un bucle cuenta dos veces. (figura pág. 635).



Grado total de un grafo

Definición

El **grado total** de un grafo es la suma de los grados de todos sus vértices.

Grado total de un grafo

Teorema 10.1.1 (teorema del saludo de mano)

El grado total de un grafo es dos veces el número de sus aristas.

Grado total de un grafo

Teorema 10.1.1 (teorema del saludo de mano)

El grado total de un grafo es dos veces el número de sus aristas.

Corolario 10.1.2

El grado total de un grafo es par.

Tema

Referencias

- Biggs, Norman L., Lloyd, E. Keith y Wilson, Robin J. [1976] (1998). Graph Theory. 1736–1936. Reimpression with corrections. Clarendon Press (vid. págs. 5, 6, 26).
- Eells, James y Toledo, Domingo, eds. (1992). Hassler Whitney. Collected Papers. Vol. 1. Birkhäuser. DOI: 10.1007/978-1-4612-2972-8 (vid. pág. 52).
- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- König, Dénes (1916). Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre (On Graphs and their Applications in Determinant Theory and Set Theory). Mathematische Annalen 77.4, págs. 453-465. DOI: 10.1007/BF01456961 (vid. pág. 6).
- Skiena, Steven S. [1997] (2020). The Algorithm Design Manual. 3.ª ed. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-54256-6 (vid. pág. 9).
- Sylvester, J. J. (1878). Chemistry and Algebra. Nature 17.432, pág. 284. DOI: 10.1038/017284a0 (vid. pág. 5).
- Whitney, Hassler (1931). A Theorem on Graphs. Annals of Mathematics 32.2. Reprinted in Eells y Toledo [1992], págs. 378-390. DOI: 10.2307/1968197 (vid. pág. 7).