

CM0246 Estructuras Discretas

§ 7.1 Funciones definidas sobre conjuntos generales

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

(Última actualización: 1 de julio de 2024)

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Tema

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Recordemos que el **producto cartesiano de A y B** , denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}.$$

Relaciones binarias

Definición

- ▶ Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.

Relaciones binarias

Definición

- ▶ Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria R de A en B** es un subconjunto de $A \times B$.
- ▶ Sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado. **El elemento x está relacionado con el elemento y por la relación R** , denotado $x R y$, si y solo si, $(x, y) \in R$.

Relaciones binarias

Definición

- ▶ Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.
- ▶ Sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado. **El elemento x está relacionado con el elemento y por la relación R** , denotado $x R y$, si y solo si, $(x, y) \in R$.
- ▶ El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R .

Relaciones binarias

Definición

- ▶ Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.
- ▶ Sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado. **El elemento x está relacionado con el elemento y por la relación R** , denotado $x R y$, si y solo si, $(x, y) \in R$.
- ▶ El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R .

Observación

La definición de relación binaria está en la Sección 1.3.

Notación

$$x R y \Leftrightarrow (x, y) \in R,$$

$$x \not R y \Leftrightarrow (x, y) \notin R.$$

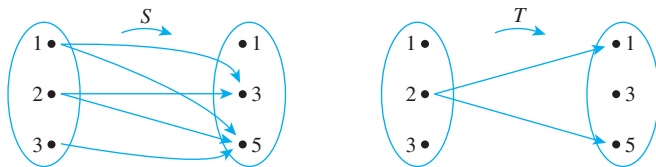
Relaciones binarias

Ejemplo 1.3.3 (diagramas de flechas)

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y las relaciones S y T de A en B definidas por

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x < y, \quad T = \{(2, 1), (2, 5)\}.$$

Diagramas de flechas para las relaciones S y T (figura pág. 16).



Relaciones binarias

Ejemplo

En el tablero.

Relaciones binarias

Ejemplo

En el tablero.

Ejemplo

Sean A y B conjuntos. Note que $R = \emptyset$ y $S = A \times B$ son relaciones de A en B . Estas relaciones son llamadas **relaciones triviales**.

Tema

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Definición de función

Definición

Sean X y Y dos conjuntos. Una **función** f de X a Y , denotada $f : X \rightarrow Y$, es una **relación** de X en Y que satisface dos propiedades:

- (i) **cada** elemento en X está relacionado con **algún** elemento en Y ,
- (ii) **ningún** elemento en X está relacionado con **más de un** elemento en Y .

Definición de función

Algunas definiciones

Sea f una función de X a Y .

- ▶ El **dominio** de f es el conjunto X .
- ▶ El **codominio** de f es el conjunto Y .

Definición de función

Algunas definiciones

Sea f una función de X a Y .

- ▶ El **dominio** de f es el conjunto X .
- ▶ El **codominio** de f es el conjunto Y .
- ▶ El símbolo « $f(x)$ » denota el único elemento en Y con el cual está relacionado x vía la función f .

El símbolo « $f(x)$ » se lee f **de** x o también **la imagen de x bajo f** .

Definición de función

Algunas definiciones (continuación)

- El **rango** de la función f es el conjunto

$$\{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } X\}.$$

Definición de función

Algunas definiciones (continuación)

- ▶ El **rango** de la función f es el conjunto

$$\{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } X\}.$$

- ▶ Si $f(x) = y$ entonces x es una **pre-imagen** o **imagen inversa** de y .

Definición de función

Algunas definiciones (continuación)

- ▶ El **rango** de la función f es el conjunto

$$\{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } X\}.$$

- ▶ Si $f(x) = y$ entonces x es una **pre-imagen** o **imagen inversa** de y .
- ▶ La **imagen inversa de** y es el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Pregunta

¿Es el conjunto $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ una función?

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Pregunta

¿Es el conjunto $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ una función?

Pregunta

¿Es la regla $f(x) = x$ una función?

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Pregunta

¿Es el conjunto $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ una función?

Pregunta

¿Es la regla $f(x) = x$ una función?

Discusión

Las funciones se pueden especificar explícitamente o por medio de una regla. ¿La especificación por reglas satisface la definición de función?

Tema

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \rightarrow Y$ y $G : X \rightarrow Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \rightarrow Y$ y $G : X \rightarrow Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $F = G$, entonces para
toda $x \in X$,

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in F \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G \\ &\Leftrightarrow y = G(x), \end{aligned}$$

es decir, $F(x) = G(x)$.

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \rightarrow Y$ y $G : X \rightarrow Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $F = G$, entonces para toda $x \in X$,

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in F \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G \\ &\Leftrightarrow y = G(x), \end{aligned}$$

es decir, $F(x) = G(x)$.

($\Leftarrow$) Si $F(x) = G(x)$, para toda $x \in X$, entonces sea $x \in X$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in F &\Leftrightarrow y = F(x) \\ &\Leftrightarrow y = G(x) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G, \end{aligned}$$

es decir, $F = G$.



Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \rightarrow Y$ y $G : X \rightarrow Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Observación

La igual establecida por el teorema anterior es la igualdad **extensional** de funciones.

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \rightarrow Y$ y $G : X \rightarrow Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Observación

La igual establecida por el teorema anterior es la igualdad **extensional** de funciones.

Observación

La igualdad extensional entre funciones no siempre es suficiente para comparar funciones. Piense por ejemplo en la comparación de los diferentes algoritmos de ordenamiento.

Tema

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Funciones booleanas

Notación

Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{Z}^+$. La notación A^n denota $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ veces}}$.

Funciones booleanas

Notación

Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{Z}^+$. La notación A^n denota $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ veces}}$.

Definición

Una **función booleana** es una función de $\{0, 1\}^n$ a $\{0, 1\}$.

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Funciones actuando sobre conjuntos

Definición

Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

- La **imagen** del conjunto A , denotada $f(A)$, está definida por

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } A\}.$$

Funciones actuando sobre conjuntos

Definición

Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

- ▶ La **imagen** del conjunto A , denotada $f(A)$, está definida por

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } A\}.$$

- ▶ La **imagen inversa** del conjunto B , denotada $f^{-1}(B)$, está definida por

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Funciones actuando sobre conjuntos

Definición

Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

- ▶ La **imagen** del conjunto A , denotada $f(A)$, está definida por

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } A\}.$$

- ▶ La **imagen inversa** del conjunto B , denotada $f^{-1}(B)$, está definida por

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Observación

En el texto la notación « $f^{-1}(\cdot)$ » se emplea con dos significados diferentes: En el primer caso denota la imagen inversa de un conjunto y en el segundo caso denotará (Sección 7.2) la función inversa de una función f .

Funciones actuando sobre conjuntos

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$. Definimos la función

$$F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$F(S) = \text{número de elementos en } S.$$

Entonces

$$F(\{1, 2\}) = 2,$$

$$F(\emptyset) = 0,$$

$$F(B) = \{1, 3\},$$

$$F^{-1}(\mathbf{Z}^+) = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}.$$

Tema

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Referencias



Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.^a ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. [pág. 2](#)).